Corrigé de la feuille de TD n° 13

Équations différentielles linéaires simples

Exercice 1

$$\begin{array}{ll} (E1) & y : x \mapsto Ce^{3x} \\ (E2) & y : x \mapsto Ce^{-4x} \\ (E3) & y : x \mapsto Ce^{5x} - \dfrac{1}{5} \\ (E4) & y : x \mapsto Ce^{-7x/6} + \dfrac{8}{7} \\ (E5) & y : x \mapsto Ce^{x/2} + 1 \end{array}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{ll} (E1) & y : x \mapsto Ae^{2x} + Be^{3x} \\ (E2) & y : x \mapsto e^{x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) \\ (E3) & y : x \mapsto e^{2x}(A\cos(x) + B\sin(x)) + \dfrac{1}{5} \\ (E4) & y : x \mapsto (Ax+B)e^{-2x} + \dfrac{1}{2} \\ (E5) & y : x \mapsto A + Be^{x/2} + x \end{array}$$

Exercice 3

1. $y : x \mapsto 3e^{2(1-x)/3} + 2$;
2. $y : x \mapsto e^{x}(\sin(2x) - 2\cos(2x)) + 2$
3. $y : x \mapsto \frac{1}{3\left(e^{2/\sqrt{3}}-1\right)}\left(\left(6e^{1/\sqrt{3}} - 5\right)e^{-\sqrt{3}x+\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left(5e^{1/\sqrt{3}} - 6\right)e^{\sqrt{3}x}\right) - \frac{5}{3}$;
4. $y : x \mapsto \frac{1}{9}\left(1 - (1+3x)e^{-3x}\right)$;
5. il n'existe pas de solution car sinon $1 = y(0) + y'(0) + y''(0) = 1 + 1 + 1 = 3$, ce qui est absurde.

Exercice 4

1. $x : t \mapsto \frac{1}{4}t^4 e^{2t}$.
2. $x : t \mapsto \frac{1}{2}t\sin(t)$.
3. $x : t \mapsto t^4 + 12t^2 - 24t + 18$.

Exercice 5

$$x : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{t^2-2t+2}{t^2}e^t + \dfrac{\lambda_1}{t^2} & \text{si} \quad t > 0 \\[2ex] \dfrac{t^2-2t+2}{t^2}e^t + \dfrac{\lambda_2}{t^2} & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 6

1. $f : x \mapsto (C - \ln(\cos(x)))\cos(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto x^2 - 2x + \left(A\cos(x\sqrt{3}/2) + B\sin(x\sqrt{3}/2)\right)e^{-x/2}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
3. $f : x \mapsto (x-2)e^{2x} + (Ax+B)e^{x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
4. $f : x \mapsto -\frac{65x+316}{4225}\cos(2x) - \frac{520x+188}{4225}\sin(2x) + Ae^{x} + Be^{3x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7

$$y : t \mapsto \begin{cases} 4\cos(t) + \left(3t - \dfrac{4}{t}\right)\sin(t) + 1 + \dfrac{\lambda_1}{t} & \text{si} \quad t > 0 \\[2ex] 4\cos(t) + \left(3t - \dfrac{4}{t}\right)\sin(t) + 1 + \dfrac{\lambda_2}{t} & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}, \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 8

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) + (e^{x})g(x) = -e^{x}$.
2. Il n'existe pas de constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto \lambda\exp(-e^{x}) - 1$ soit strictement positive, donc il n'existe pas de fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui vérifie l'énoncé.
3. $f : x \mapsto e^{x}/(\lambda\exp(-e^{x}) - 1)$ avec $\lambda \leqslant 1$.

Exercice 9

1. $x :]0,1[\to]0,+\infty[, t \mapsto \frac{-1}{t+\lambda}$ avec $\lambda \leqslant -1$.
2. $x :]0,+\infty[\to]0,+\infty[, t \mapsto \sqrt{t^2+2t+2\lambda}$ avec $\lambda \geqslant 0$.
3. $x : t \mapsto \tan(\lambda - e^{-t})$.

Exercice 10

1. $f : x \mapsto e^x(A\cos(x) + B\sin(x)) + (x+1)^2$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
2. $f : x \mapsto e^x \sin(x) + (x+1)^2$.
3. $f \in \mathcal{C}^\infty$ comme somme et produit de fonctions de classes $\mathcal{C}^\infty$.
4. Soit $n \geqslant 3$. En dérivant n fois l'équation différentielle (E), on obtient en $x = 0$:

   $$f^{(n+2)}(0) - 2f^{(n+1)}(0) + 2f^{(n)}(0) = 0$$

   donc

   $$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$

5. On a :

   $$u_0 = 1,\ u_1 = 3,\ u_2 = 4,\ u_3 = 2,\ u_4 = 0$$

   Puis on reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Donc :

   $$\forall n \geqslant 3,\ u_n = \sqrt{2}^n \Big(A\cos(n\pi/4) + B\sin(n\pi/4)\Big).$$

   On détermine les constantes A et B à l'aide des valeurs u_3 et u_4 et on obtient :

   $$\forall n \geqslant 3,\ u_n = \sqrt{2}^n \sin(n\pi/4).$$