Corrigé de la feuille de TD n° 13

Géométrie analytique

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\|^2 + \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + \|\overrightarrow{IB}\|^2 + \|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \|\overrightarrow{IC}\|^2 \\ &= 2\|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) + \|\overrightarrow{IB}\|^2 + \|\overrightarrow{IC}\|^2. \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[BC]$ donc $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{IB}$. Par conséquent :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{0} + BI^2 + \|\overrightarrow{BI}\|^2 = 2AI^2 + 2BI^2.$$

2.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\right) \\ &= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} \\ &= \|\overrightarrow{AI}\|^2 - \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB} \\ &= AI^2 - \|\overrightarrow{IB}\|^2 \\ &= AI^2 - BI^2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \left|AB^2 - AC^2\right| &= \left|\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2\right| \\ &= \left|\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\|^2 - \|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}\|^2\right| \\ &= \left|\|\overrightarrow{AI}\|^2 + 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IB} + \|\overrightarrow{IB}\|^2 - \|\overrightarrow{AI}\|^2 - 2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC} - \|\overrightarrow{IC}\|^2\right| \\ &= \left|2\overrightarrow{AI}.\left(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right) + BI^2 - \|\overrightarrow{BI}\|^2\right| \\ &= \left|2\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CB}\right| \\ &= 2\left|\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HI}\right).\overrightarrow{CB}\right| \\ &= 2\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{CB}\right|. \end{aligned}$$

Or H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CB} = 0 \\ \overrightarrow{HI} \text{ et } \overrightarrow{CB} \text{ colinéaires} \Rightarrow \cos\left(\widehat{\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{CB}}\right) = \pm 1 \Rightarrow \left|\overrightarrow{HI}.\overrightarrow{CB}\right| = \|\overrightarrow{HI}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$\left|AB^2 - AC^2\right| = 2\left|0 + \overrightarrow{HI}.\overrightarrow{CB}\right| = 2BC \times IH.$$

4.

$$\begin{aligned} AB^2 + \lambda AC^2 &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \lambda\|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JB}\|^2 + \lambda\|\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC}\|^2 \\ &= \|\overrightarrow{AJ}\|^2 + 2\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JB} + \|\overrightarrow{JB}\|^2 + \lambda\|\overrightarrow{AJ}\|^2 + 2\lambda\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{JC} + \lambda\|\overrightarrow{JC}\|^2 \\ &= (1+\lambda)\|\overrightarrow{AJ}\|^2 + 2\overrightarrow{AJ}.\left(\overrightarrow{JB} + \lambda\overrightarrow{JC}\right) + \|\overrightarrow{JB}\|^2 + \lambda\|\overrightarrow{JC}\|^2. \end{aligned}$$

Or J est sur le segment $]BC[$ et $\lambda = \frac{BJ}{CJ}$ donc $\overrightarrow{JC} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{JB}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} AB^2 + \lambda AC^2 &= (1+\lambda)AJ^2 + 2\left(\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{0}\right) + BJ^2 + \lambda\left\|\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{BJ}\right\|^2 \\ &= (1+\lambda)AJ^2 + BJ^2 + \lambda \times \frac{1}{\lambda^2}\|\overrightarrow{BJ}\|^2 \\ &= (1+\lambda)AJ^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)BJ^2. \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle affine. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$, $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right)$ et $\gamma = \left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$.

1.

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \|\overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 = c^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) + b^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha). \end{aligned}$$

De même : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

2. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$ et $\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$.
3. $c^2 - 2bc\cos(\alpha) + (b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow c^2 - 3\sqrt{3}c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$ ou $c = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 3

1. $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|^2\right) \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\|$.
2. Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si deux de ses côtés consécutifs se coupent à angle droit, et donc, d'après le résultat de la question précédente, si et seulement si ses deux diagonales sont de même longueur.

Exercice 4

1.

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \\
= \ & \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \\
= \ & \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \\
= \ & -\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \\
= \ & \left(-\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC}\right).\overrightarrow{AB} \\
= \ & \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AB} \\
= \ & \overrightarrow{BB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}.\overrightarrow{AB} = 0.
\end{aligned}$$

2. Si H est l'intersection des hauteurs issues de A et B alors $\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HB}\perp\overrightarrow{CA}$, donc $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$. D'après le résultat de la question précédente on a $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ donc $\overrightarrow{HC}\perp\overrightarrow{AB}$ et H appartient aussi à la hauteur issue de C.

Exercice 5

Soit $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur non nul du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

1. $1 = \|\overrightarrow{u}\| = \|\lambda\overrightarrow{w}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{w}\| = |\lambda|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ donc $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ ou $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ car $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0} \Rightarrow \|\overrightarrow{w}\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \neq 0$.
2. Soit $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
& (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^2 \\
\Leftrightarrow \ & \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| = 1 \\ \overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v} \end{cases} \\
\Leftrightarrow \ & \begin{cases} x^2+y^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 = 1 \\ \lambda\alpha x + \lambda\beta y = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

Puisque $\lambda \neq 0$, la deuxième ligne donne $\alpha x = -\beta y$ et donc $\alpha^2 x^2 = \beta^2 y^2$. En reportant dans la première ligne on obtient :

$$\alpha^2 = \alpha^2(x^2+y^2) = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \beta^2 y^2 + \alpha^2 y^2 = (\alpha^2+\beta^2)y^2$$

et donc $y = \lambda\alpha$ ou $y = -\lambda\alpha$. De même on obtient $x = \lambda\beta$ ou $x = -\lambda\beta$. Ainsi on a quatre possibilités pour les coordonnées de $\overrightarrow{v}$: $\lambda\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\lambda\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $\lambda\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ ou $\lambda\begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Or $\alpha x = -\beta y$ donc il reste seulement :

$$\overrightarrow{v} = \lambda\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{v} = \lambda\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v} = a'\begin{pmatrix} \lambda\alpha \\ \lambda\beta \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} -\lambda\beta \\ \lambda\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\alpha a' - \lambda\beta b' \\ \lambda\beta a' + \lambda\alpha b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\beta \\ \lambda\beta & \lambda\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or $\det\begin{pmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\beta \\ \lambda\beta & \lambda\alpha \end{pmatrix} = \lambda^2\alpha^2 + \lambda^2\beta^2 = \lambda^2(\alpha^2+\beta^2) = 1$ donc

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & -\lambda\beta \\ \lambda\beta & \lambda\alpha \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ -\lambda\beta & \lambda\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha a + \lambda\beta b \\ -\lambda\beta a + \lambda\alpha b \end{pmatrix}$$

et par conséquent $M(\lambda(\alpha a + \beta b), \lambda(\alpha b - \beta a))$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 6

1. $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas colinéaires car $\overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$ et il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{w}$. Donc si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ -2 = \lambda + \mu \\ 3 = \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -2 - \lambda = -1 \\ \mu = \lambda - 3 = -4 \end{cases} .$$

Puisque le système n'a pas de solutions, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.

2.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = a'\overrightarrow{u} + b'\overrightarrow{v} + c'\overrightarrow{w} = a'\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a' - b' \\ -2a' + b' + c' \\ 3a' + b' - c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or on a :

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{3}L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}
\end{array}
$$

donc :

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et par conséquent $M(1,2,3)$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

3.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a+b+c \\ -a+b+c \\ 5a+4b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+b+c}{3} \\ \frac{-a+b+c}{3} \\ \frac{5a+4b+c}{3} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et par conséquent $M\left(\frac{2a+b+c}{3}, \frac{-a+b+c}{3}, \frac{5a+4b+c}{3}\right)$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.

Exercice 7

Le barycentre du système $((A,1),(B,-2),(C,3))$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{1\times(-1) - 2\times 3 + 3\times 5}{2}, \frac{1\times 1 - 2\times(-3) + 3\times(-1)}{2}\right) = (4,2).$$

Exercice 8

1. Soit H' le projeté orthogonal de C sur (AB). Puisque (CH') et (IH) sont parallèles, on obtient d'après le théorème de Thalès dans le triangle BCH' : $\frac{BH}{BH'} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BH'}$. Or H' est également le milieu de $[AB]$ car ABC est équilatéral donc $\overrightarrow{BH'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{AH} + 3\overrightarrow{BH} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}\right) + 3\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$$

donc $H = \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,3)\right)$.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bar}\left((A,1),(B,5),(C,2)\right) &= \mathrm{Bar}\left((A,1),(B,3),(B,2),(C,2)\right) \\
&= \mathrm{Bar}\left((H,4),(B,2),(C,2)\right) \\
&= \mathrm{Bar}\left((H,4),(I,4)\right) \ \text{(car } I = \mathrm{Bar}\left((B,1),(C,1)\right)\text{)} \\
&= \mathrm{Bar}\left((H,1),(I,1)\right)
\end{aligned}
$$

donc $\mathrm{Bar}\left((A,1),(B,5),(C,2)\right)$ est le milieu de $[IH]$.

Exercice 9

1. $x^2+y^2-8x+y+10 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ donc $\mathcal{C}_1$ est de centre $\left(4, -\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$.

2. $M(x,y) \in \mathcal{C}_2$ si et seulement si

$$0 = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (3-x)(7-x) + (1-y)(-1-y) = x^2+y^2-10x+20.$$

3. Soit $M(x,y) \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2-8x+y+10 &=& 0 \\ x^2+y^2-10x+20 &=& 0 \end{array} \right. .$$

$L_1 - L_2$ donne $2x+y-10 = 0$ c'est-à-dire $y = 10-2x$. En reportant dans L_2, on obtient :

$$0 = x^2 + (10-2x)^2 - 10x + 20 = 5x^2 - 50x + 120 \Leftrightarrow 0 = x^2 - 10x + 24$$

donc $x = 4$ ou $x = 6$. Par conséquent, $C_1 \cap \mathcal{C}_2 = \{A, B\}$ avec $A(4,2)$ et $B(6,-2)$.

Exercice 10

$x^2 - 2mx + y^2 + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = m^2 - 4$ donc on obtient l'ensemble vide si $m \in]-2,2[$, le point de coordonnées $(m,-1)$ si $m \in \{-2,2\}$, ou le cercle de centre $(m,-1)$ et de rayon $\sqrt{m^2-4}$ si $m \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

Exercice 11

Soit G le barycentre du système $((A,1),(B,1),(C,1))$. Alors :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}=3\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{0}=3\overrightarrow{MG}.$$

Soit I le milieu de $[GD]$. Alors :

$$\begin{array}{ll} & (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD}=3m \\ \Leftrightarrow & 3\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MD}=3m \\ \Leftrightarrow & \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IG}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)=m \\ \Leftrightarrow & \|\overrightarrow{MI}\|^2+\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{ID}\right)+\overrightarrow{IG}.\overrightarrow{ID}=m \\ \Leftrightarrow & MI^2+\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{0}+\left(-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GD}\right).\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GD}\right)=m \\ \Leftrightarrow & MI^2=m+\dfrac{1}{4}\|\overrightarrow{GD}\|^2=m+\dfrac{1}{4}GD^2 \end{array}$$

donc $\mathcal{E}_m=\emptyset$ si $m<-\frac{1}{4}GD^2$, $\mathcal{E}_m=\{I\}$ si $m=-\frac{1}{4}GD^2$ et $\mathcal{E}_m$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{m+\frac{1}{4}GD^2}$ si $m>-\frac{1}{4}GD^2$.

Exercice 12

1. On obtient une représentation paramétrique à l'aide du point $A(1,2,-1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB}=(-2-1)\overrightarrow{i}+(4-2)\overrightarrow{j}+(0-(-1))\overrightarrow{k}$:

$$(AB):\left\{\begin{array}{rcl} x&=&1-3t\\ y&=&2+2t\\ z&=&-1+t\end{array}\right.,\ t\in\mathbb{R}.$$

La troisième équation paramétrique donne $t=z+1$ ce qui permet d'obtenir un système d'équations cartésiennes de (AB) en remplaçant l'expression du paramètre t dans les deux premières équations paramétrique :

$$(AB):\left\{\begin{array}{rcl} x+3z+2&=&0\\ y-2z-4&=&0\end{array}\right..$$

2. La première équation paramétrique de $\mathcal{D}_m$ donne $s=x-3$ et donc $\mathcal{D}_m$: $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-8&=&0\\ 2x-z+(m-6)&=&0\end{array}\right.$. Pour déterminer l'intersection de (AB) et $\mathcal{D}_m$ on résout ensuite le système linéaire formé par les quatre équations cartésiennes. On obtient que $(AB)\cap\mathcal{D}_m$ est le point de coordonnées $(4,0,-2)$ si $m=-4$ et $(AB)\cap\mathcal{D}_m=\emptyset$ si $m\neq-4$.

Exercice 13

Les points $A(-1,0,-1)$ et $B(0,-1,0)$ sont sur la droite $\mathcal{D}$. Puisque $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ce sont deux vecteurs directeurs du plan contenant M et $\mathcal{D}$. On en déduit le système d'équations paramétriques suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x&=&1+2s+t\\ y&=&1+s+2t\\ z&=&1+2s+t\end{array}\right.,\ (s,t)\in\mathbb{R}^2.$$

Les deux premières équations donnent $s=\frac{2x-y-1}{3}$ et $t=\frac{2y-x-1}{3}$, d'où une équation cartésienne du plan en reportant ces expressions dans la troisième équation : $x-z=0$.

Exercice 14

Soit $H(x,y)$ l'orthocentre de ABC. On a :

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow 3(x-2)-4(y-1)=0\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow 4(x-3)-3(y-2)=0\\ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow (x-6)+(y+2)=0\end{array}\right..$$

On en déduit que $H\left(\frac{18}{7},\frac{10}{7}\right)$.