Feuille de TD n° 14

Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1

Soient A, B et C trois points distincts du plan affine. On note I le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC). Montrer les égalités suivantes :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2BI^2 \tag{1}$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - BI^2 \tag{2}$$
$$|AB^2 - AC^2| = 2BC \times IH. \tag{3}$$

Plus généralement, si J est un point de $]BC[$ montrer que :

$$AB^2 + \lambda AC^2 = (1+\lambda)AJ^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) BJ^2 \quad \text{où } \lambda = \frac{BJ}{CJ}. \tag{4}$$

Exercice 2

On considère un triangle du plan affine dont on désigne par a, b et c les longueurs des côtés, et par α, β et γ les mesures de leurs angles opposés respectifs.

1. Démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$ et trouver deux autres formules similaires.
2. Calculer α, β et γ si $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$.
3. Calculer c si $a = 2$, $b = 3$ et $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

1. Montrer que $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme soit un rectangle.

Exercice 4

Soit ABC un triangle du plan affine.

1. Démontrer pour tout point M du plan affine que :
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$
2. On note H l'intersection des hauteurs issues de A et B. Déduire du résultat précédent que H appartient à la hauteur issue de C.

Exercice 5

Soit $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur non nul du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer tous les scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{w}$ soit de norme 1.
2. Déterminer tous les vecteurs $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tels que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ forme une base orthonormée du plan euclidien $\mathbb{R}^2$.
3. On pose :
$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$
Soit $M(a, b)$ un plan du plan affine (muni de la base canonique). Déterminer les coordonnées de M dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 6

On considère les vecteurs suivants de l'espace euclidien :

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas coplanaires.
2. On considère le point A de l'espace affine de coordonnées $A(-1, 3, 2)$ dans la base canonique. Déterminer les coordonnées de A dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
3. Plus généralement, déterminer les coordonnées dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ de tout point M de l'espace affine de coordonnées $M(a, b, c)$ dans la base canonique.

Exercice 7

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle $\mathcal{C}_1$ d'équation cartésienne :
$$x^2 + y^2 - 8x + y + 10 = 0.$$
2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_2$ de diamètre $[AB]$ où les points A et B ont pour coordonnées $A(3, 1)$ et $B(7, -1)$.
3. Déterminer $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$.

Exercice 8

Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points du plan affine vérifiant l'équation cartésienne $x^2 - 2mx + y^2 + 2y + 5 = 0$.

Exercice 9

Soient A, B, C et D quatre points de l'espace affine. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\mathcal{E}_m$ des points M tels que $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}).\overrightarrow{MD} = 3m$.

Exercice 10

On considère les points de l'espace affine de coordonnées $A(1, 2, -1)$ et $B(-2, 4, 0)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique et une représentation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ l'intersection de (AB) avec la droite $\mathcal{D}_m$ de représentation paramétrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & s+3 \\ y & = & -2s+2 \\ z & = & 2s+m \end{array} \right. , \ s \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11

Dans l'espace affine, on considère le point de coordonnées $M(1,1,1)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation cartésienne suivante :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x+y+1 & = & 0 \\ y+z+1 & = & 0 \end{array} \right. .$$

Déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne du plan contenant M et $\mathcal{D}$.

Exercice 12

Dans le plan affine, on considère les points de coordonnées $A(2,1)$, $B(3,2)$ et $C(6,-2)$. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre de ABC.