

Géométrie du plan et de l'espace

Exercice 1

1.

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= \|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \\ &= \|\vec{AI} + \vec{IB}\|^2 + \|\vec{AI} + \vec{IC}\|^2 \\ &= \|\vec{AI}\|^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB} + \|\vec{IB}\|^2 + \|\vec{AI}\|^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IC} + \|\vec{IC}\|^2 \\ &= 2\|\vec{AI}\|^2 + 2\vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) + \|\vec{IB}\|^2 + \|\vec{IC}\|^2. \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[BC]$ donc $\vec{IC} = \vec{BI} = -\vec{IB}$. Par conséquent :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{0} + BI^2 + \|\vec{BI}\|^2 = 2AI^2 + 2BI^2.$$

2.

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (\vec{AI} + \vec{IB}) \cdot (\vec{AI} + \vec{IC}) \\ &= \vec{AI} \cdot \vec{AI} + \vec{AI} \cdot \vec{IC} + \vec{IB} \cdot \vec{AI} + \vec{IB} \cdot \vec{IC} \\ &= \|\vec{AI}\|^2 - \vec{AI} \cdot \vec{IB} + \vec{AI} \cdot \vec{IB} - \vec{IB} \cdot \vec{IB} \\ &= AI^2 - \|\vec{IB}\|^2 \\ &= AI^2 - BI^2. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |AB^2 - AC^2| &= \left| \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2 \right| \\ &= \left| \|\vec{AI} + \vec{IB}\|^2 - \|\vec{AI} + \vec{IC}\|^2 \right| \\ &= \left| \|\vec{AI}\|^2 + 2\vec{AI} \cdot \vec{IB} + \|\vec{IB}\|^2 - \|\vec{AI}\|^2 - 2\vec{AI} \cdot \vec{IC} - \|\vec{IC}\|^2 \right| \\ &= \left| 2\vec{AI} \cdot (\vec{IB} - \vec{IC}) + BI^2 - \|\vec{BI}\|^2 \right| \\ &= \left| 2\vec{AI} \cdot \vec{CB} \right| \\ &= 2 \left| (\vec{AH} + \vec{HI}) \cdot \vec{CB} \right| \\ &= 2 \left| \vec{AH} \cdot \vec{CB} + \vec{HI} \cdot \vec{CB} \right|. \end{aligned}$$

Or H est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc

$$\begin{cases} \vec{AH} \perp \vec{CB} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{CB} = 0 \\ \vec{HI} \text{ et } \vec{CB} \text{ colinéaires} \Rightarrow \cos(\widehat{\vec{HI}, \vec{CB}}) = \pm 1 \Rightarrow |\vec{HI} \cdot \vec{CB}| = \|\vec{HI}\| \times \|\vec{CB}\| \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$|AB^2 - AC^2| = 2 \left| 0 + \vec{HI} \cdot \vec{CB} \right| = 2BC \times IH.$$

4.

$$\begin{aligned} AB^2 + \lambda AC^2 &= \|\vec{AB}\|^2 + \lambda \|\vec{AC}\|^2 \\ &= \|\vec{AJ} + \vec{JB}\|^2 + \lambda \|\vec{AJ} + \vec{JC}\|^2 \\ &= \|\vec{AJ}\|^2 + 2\vec{AJ} \cdot \vec{JB} + \|\vec{JB}\|^2 + \lambda \|\vec{AJ}\|^2 + 2\lambda \vec{AJ} \cdot \vec{JC} + \lambda \|\vec{JC}\|^2 \\ &= (1 + \lambda) \|\vec{AJ}\|^2 + 2\vec{AJ} \cdot (\vec{JB} + \lambda \vec{JC}) + \|\vec{JB}\|^2 + \lambda \|\vec{JC}\|^2. \end{aligned}$$

Or J est sur le segment $]BC[$ et $\lambda = \frac{BJ}{CJ}$ donc $\vec{JC} = \frac{1}{\lambda} \vec{BJ} = -\frac{1}{\lambda} \vec{JB}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} AB^2 + \lambda AC^2 &= (1 + \lambda)AJ^2 + 2(\vec{AJ} \cdot \vec{0}) + BJ^2 + \lambda \left\| \frac{1}{\lambda} \vec{BJ} \right\|^2 \\ &= (1 + \lambda)AJ^2 + BJ^2 + \lambda \times \frac{1}{\lambda^2} \|\vec{BJ}\|^2 \\ &= (1 + \lambda)AJ^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) BJ^2. \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle affine. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\alpha = (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}})$,

$\beta = (\widehat{\vec{BC}, \vec{BA}})$ et $\gamma = (\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}})$.

1.

$$\begin{aligned} a^2 &= BC^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA} + \vec{AC}\|^2 = \|\vec{BA}\|^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC} + \|\vec{AC}\|^2 \\ &= AB^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AC^2 = c^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}}) + b^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha). \end{aligned}$$

De même : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$.

2. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{16}\right)$ et $\gamma = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$.

3. $c^2 - 2bc \cos(\alpha) + (b^2 - a^2) = 0 \Rightarrow c^2 - 3\sqrt{3}c + 5 = 0 \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{3} - \sqrt{7}}{2}$ ou $c = \frac{3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{2}$.

Exercice 3

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 0 = \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si deux de ses côtés consécutifs se coupent à angle droit, et donc, d'après le résultat de la question précédente, si et seulement si ses deux diagonales sont de même longueur.

Exercice 4

1.

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (-\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BB} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \end{aligned}$$

- Si H est l'intersection des hauteurs issues de A et B alors $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{HB} \perp \overrightarrow{CA}$, donc $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ et $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. D'après le résultat de la question précédente on a $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ donc $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$ et H appartient aussi à la hauteur issue de C .

Exercice 5

Soit $\vec{w} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur non nul du plan euclidien \mathbb{R}^2 .

- $1 = \|\vec{u}\| = \|\lambda \vec{w}\| = |\lambda| \|\vec{w}\| = |\lambda| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ donc $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ou $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$

car $\vec{w} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{w}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \neq 0$.

- Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} & (\vec{u}, \vec{v}) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}^2 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \|\vec{v}\|^2 = 1 \\ \lambda \alpha x + \lambda \beta y = \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $\lambda \neq 0$, la deuxième ligne donne $\alpha x = -\beta y$ et donc $\alpha^2 x^2 = \beta^2 y^2$. En reportant dans la première ligne on obtient :

$$\alpha^2 = \alpha^2(x^2 + y^2) = \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \beta^2 y^2 + \alpha^2 y^2 = (\alpha^2 + \beta^2) y^2$$

et donc $y = \lambda \alpha$ ou $y = -\lambda \alpha$. De même on obtient $x = \lambda \beta$ ou $x = -\lambda \beta$. Ainsi on a quatre possibilités pour les coordonnées de \vec{v} : $\lambda \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$, $\lambda \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$, $\lambda \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ ou $\lambda \begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$. Or $\alpha x = -\beta y$ donc il reste seulement :

$$\vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{v} = \lambda \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = a' \vec{u} + b' \vec{v} = a' \begin{pmatrix} \lambda \alpha \\ \lambda \beta \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -\lambda \beta \\ \lambda \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \alpha a' - \lambda \beta b' \\ \lambda \beta a' + \lambda \alpha b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha & -\lambda \beta \\ \lambda \beta & \lambda \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or $\det \begin{pmatrix} \lambda \alpha & -\lambda \beta \\ \lambda \beta & \lambda \alpha \end{pmatrix} = \lambda^2 \alpha^2 + \lambda^2 \beta^2 = \lambda^2 (\alpha^2 + \beta^2) = 1$ donc

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha & -\lambda \beta \\ \lambda \beta & \lambda \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha & \lambda \beta \\ -\lambda \beta & \lambda \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \alpha a + \lambda \beta b \\ -\lambda \beta a + \lambda \alpha b \end{pmatrix}$$

et par conséquent $M(\lambda(\alpha a + \beta b), \lambda(\alpha b - \beta a))$ dans la base (\vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 6

- \vec{v} et \vec{w} ne sont pas colinéaires car $\vec{w} \neq \vec{0}$ et il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{w}$. Donc si \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires alors il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 1 = -\lambda \\ -2 = \lambda + \mu \\ 3 = \lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = -2 - \lambda = -1 \\ \mu = \lambda - 3 = -4 \end{cases}.$$

Puisque le système n'a pas de solutions, \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} ne sont pas coplanaires.

2.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OM} = a' \vec{u} + b' \vec{v} + c' \vec{w} = a' \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a' - b' \\ -2a' + b' + c' \\ 3a' + b' - c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 10 1. On obtient une représentation paramétrique à l'aide du point $A(1, 2, -1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{AB} = (-2 - 1)\vec{i} + (4 - 2)\vec{j} + (0 - (-1))\vec{k}$:

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

La troisième équation paramétrique donne $t = z + 1$ ce qui permet d'obtenir un système d'équations cartésiennes de (AB) en remplaçant l'expression du paramètre t dans les deux premières équations paramétrique :

$$(AB) : \begin{cases} x + 3z + 2 = 0 \\ y - 2z - 4 = 0 \end{cases}.$$

2. La première équation paramétrique de \mathcal{D}_m donne $s = x - 3$ et donc \mathcal{D}_m :

$$\begin{cases} 2x + y - 8 = 0 \\ 2x - z + (m - 6) = 0 \end{cases}.$$
 Pour déterminer l'intersection de (AB) et \mathcal{D}_m on résout ensuite le système linéaire formé par les quatre équations cartésiennes. On obtient que $(AB) \cap \mathcal{D}_m$ est le point de coordonnées $(4, 0, -2)$ si $m = -4$ et $(AB) \cap \mathcal{D}_m = \emptyset$ si $m \neq -4$.

Exercice 11

Les points $A(-1, 0, -1)$ et $B(0, -1, 0)$ sont sur la droite \mathcal{D} . Puisque $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{BM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ce sont deux vecteurs directeurs du plan contenant M et \mathcal{D} . On en déduit le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + 2s + t \\ y = 1 + s + 2t \\ z = 1 + 2s + t \end{cases}, (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Les deux premières équations donnent $s = \frac{2x - y - 1}{3}$ et $t = \frac{2y - x - 1}{3}$, d'où une équation cartésienne du plan en reportant ces expressions dans la troisième équation : $x - z = 0$.

Exercice 12

Soit $H(x, y)$ l'orthocentre de ABC . On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow 3(x - 2) - 4(y - 1) = 0 \\ \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow 4(x - 3) - 3(y - 2) = 0 \\ \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow (x - 6) + (y + 2) = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que $H\left(\frac{18}{7}, \frac{10}{7}\right)$.