Feuille de TD n° 15

Polynômes

Exercice 1

Dire si chacune des fonctions suivantes est polynomiale et justifier votre réponse.

1. $f_1 : x \mapsto \sin(x)$
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$
3. $f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4. $f_4 : x \mapsto \exp(x)$
5. $f_5 : x \mapsto \frac{(x+1)^{42}-(1-x)^{42}}{x}$
6. $f_6 : x \mapsto \cos\left(42 \arccos(x)\right)$ (pour $x \in]-1, 1[$)

Exercice 2

1. Démontrer que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls.
2. Démontrer un résultat similaire pour les polynômes impairs.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$.

1. Montrer que le polynôme P_n n'a pas de racines multiples.
2. Déterminer le nombre de racines réelles de P_n (on pourra utiliser une récurrence).

Exercice 4

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant les relations suivantes :

1. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
2. $P'^2 = 4P$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(x+1)$
4. $\deg(P) = 5$, $P+1$ factorisable par $(X-1)^3$ et $P-1$ factorisable par $(X+1)^3$

Exercice 5

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ avec $a \neq 0$. On note α_1, α_2 et α_3 les trois racines de P.

1. Calculer en fonction de a, b, c et d, les expressions $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.
2. En développant $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2$, calculer en fonction de a, b, c et d, l'expression $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par d pour que 0 ne soit pas une racine de P, et dans cas, calculer en fonction de a, b, c et d, l'expression $\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}$.

Exercice 6

Factoriser chacun des polynômes suivants :

1. $P_1 = X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $P_2 = X^4 - X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $P_3 = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$
4. $P_4 = X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice 7

Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$ le polynôme $P = (a+3)X^3 - aX^2 - (a+2)X + a$ admet-il une racine complexe de module 1 ?