Corrigé de la feuille de TD n° 15

Polynômes

Exercice 1 (polynômes)

1. Si $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ est une fonction polynomiale alors f_1 a une infinité de racines car $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc f_1 serait le polynôme nul ce qui est absurde car $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$.
2. Si $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction polynomiale alors f_2 serait continue sur tout $\mathbb{R}$, en particulier en 0 ce qui est absurde car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
3. Si $f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est une fonction polynomiale alors f_3 serait le polynôme nul car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ ce qui est absurde car $f_3(0) = 1 \neq 0$.
4. Si $f_4 : x \mapsto \exp(x)$ est une fonction polynomiale alors f_4 serait le polynôme nul car $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ ce qui est absurde car $\exp(0) = 1 \neq 0$.
5. On a d'après la formule du binôme de Newton pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{1}{x}\left((x+1)^{42} - (1-x)^{42}\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^k - \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}(-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - x^k\right) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k + x^k\right)\\
&= 0 + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\ k=2n+1}}^{42}\binom{42}{k}2x^k = \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{20}\binom{42}{2n+1}x^{2n+1} = 2\sum_{n=1}^{20}\binom{42}{2n+1}x^{2n}
\end{aligned}$$

donc f_5 est bien une application polynomiale.

6. On a d'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton pour tout $x \in]-1,1[$ et en posant $\theta = \arccos(x)$:

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= \cos(42\theta) = \mathrm{Re}\left(\cos(42\theta) + i\sin(42\theta)\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{42}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{42}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)(i\sin(\theta))^{42-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)\sin^{42-k}(\theta)(i)^{42-k}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)\sin^{42-k}(\theta)(i)^{42-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}\cos^{2n}(\theta)\sin^{42-2n}(\theta)(i)^{42-2n}\right.\\
&\qquad\left. + \sum_{k=0}^{20}\binom{42}{2n+1}\cos^{2n+1}(\theta)\sin^{42-2n-1}(\theta)(i)^{42-2n-1}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}\cos^{2n}(\theta)\sin^{42-2n}(\theta)(-1)^{21-n}\right.\\
&\qquad\left. - i\sum_{k=0}^{20}\binom{42}{2n+1}\cos^{2n+1}(\theta)\sin^{42-2n-1}(\theta)(-1)^{21-n}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}(\cos(\theta))^{2n}(\sin^2(\theta))^{21-n}(-1)^{21-n}\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}(\cos(\arccos(x)))^{2n}(1-(\cos(\arccos(x))^2)^{21-n}(-1)^{21-n}\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}x^{2n}(1-x^2)^{21-n}(-1)^{21-n}
\end{aligned}$$

donc f_6 est bien une application polynomiale.

Exercice 2

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Si P est pair alors $P(X) = P(-X)$ c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k$. Ce qui donne $a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en identifiant les coefficients. En particulier, si k est impair on a $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$.
2. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Si P est impair alors $-P(X) = P(-X)$ c'est-à-dire $-\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k X^k$. Ce qui donne $-a_k =$

$a_k(-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en identifiant les coefficients. En particulier, si k est pair on a $-a_k = a_k$ donc $a_k = 0$.

Exercice 3

1. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine multiple de $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. Par conséquent $P_n(\alpha) = 0$ et $P_n'(\alpha) = 0$. Or on a :

$$P_n'(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} \alpha^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \alpha^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \alpha^k \text{ (avec le changement de variable } k \to k+1)$$

donc $0 = P_n(\alpha) - P_n'(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\alpha^k = \frac{1}{n!}\alpha^n$ et on en déduit que $\alpha = 0$. Mais ceci est absurde car $P_n = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3 + \cdots + \frac{1}{n!}X^n$ donc $P_n(0) = 1 \neq 0$. Il n'existe donc pas de racines multiples de P_n.

2. On commence par regarder les premières valeurs de $n \in \mathbb{N}$. $P_0 = 1$ n'a pas de racines réelles, $P_1 = 1 + X$ a une seule racine réelle (qui est -1), $P_2 = 1 + X + \frac{1}{2}X^2$ n'a pas de racines réelles car $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times \frac{1}{2} = -1 < 0$. Pour $P_3 = 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$ on étudie la fonction $x \mapsto P_3(x)$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ P_3'(x) = 1 + \frac{2}{2}x + \frac{3}{6}x^2 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = P_2(x) > 0$ (car on a vu que P_2 n'a pas de racines réelles et le coefficient dominant de P_2 est positif) donc $x \mapsto P_3(x)$ est strictement croissante avec $\lim_{x\to-\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_3(x) = +\infty$, donc P_3 admet une unique racine réelle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires).

   On va donc démontrer par récurrence que P_n n'a pas de racines réelles si n est pair et P_n a une seule racine réelle si n est impair. On a déjà démontré l'initialisation pour $n = 0$. On suppose le résultat vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. 1^er^cas : n est pair. On étudie la fonction $x \mapsto P_{n+1}(x)$. On a $\forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+1}'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = P_n(x)$. Or $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) > 0$ car P_n n'a pas de racines réelles d'après l'hypothèse de récurrence et le coefficient dominant de P_n est positif. Donc $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est strictement croissante avec $\lim_{x\to-\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$, donc P_{n+1} admet une unique racine réelle (d'après le théorème des valeurs intermédiaires). 2^e^cas : n est impair. On étudie la fonction $x \mapsto P_{n+1}(x)$. On a $P_{n+1}'(x) = P_n(x)$ (même calcul que précédemment). D'après l'hypothèse de récurrence, P_n a une seule racine réelle, notons la α, donc $\forall x \in]-\infty, \alpha[,\ P_n(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha, +\infty[,\ P_n(x) > 0$ car le coefficient dominant de P_n est positif. Donc $x \mapsto P_{n+1}(x)$ admet un minimum en α qui vaut

$$\begin{aligned} P_{n+1}(\alpha) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\alpha^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\alpha^k + \frac{1}{(n+1)!}\alpha^{n+1} = P_n(\alpha) + \frac{1}{(n+1)!}\alpha^{n+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\alpha^{n+1} \end{aligned}$$

   car $P_n(\alpha) = 0$. Or $n+1$ est pair et $\alpha \neq 0$ (car 0 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(0) = 1 \neq 0$). Donc le minimum de $x \mapsto P_{n+1}(x)$ est strictement positif et par conséquent P_{n+1} n'a pas de racines réelles. D'où le résultat par récurrence.

Exercice 4

1. Si $P = 0$ alors $P(X^2) = 0 = (X^2+1)P(X)$. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Alors $2n = \deg(P(X^2)) = \deg((X^2+1)P(X)) = 2 + n$. Donc $n = 2$ et P est de la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} aX^4 + bX^2 + c &= P(X^2) \\ &= (X^2+1)P(X) \\ &= (X^2+1)(aX^2+bX+c) \\ &= aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c \end{aligned}$$

   ce qui donne par identification des coefficients : $a = a$, $b = 0$, $a + c = b$ donc $c = -a$, $b = 0$, $c = c$. Ainsi, l'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est $\{0\} \cup \{aX^2 - a \,|\, a \in \mathbb{R}^\star\}$.

2. Si $P = 0$ alors $P'^2 = 0 = 4P$. Soit maintenant $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que $P'^2 = 4P$. Alors $2(n-1) = \deg(P'^2) = \deg(4P) = n$. Donc $n = 2$ et P est de la forme $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On a :

$$4aX^2 + 4bX + 4c = 4P = P'^2 = (2aX+b)^2 = 4a^2X^2 + 4abX + b^2$$

   ce qui donne par identification des coefficients : $4a = 4a^2$ donc $a = 1$ (car $a \neq 0$), $4b = 4ab$ donc $b = b$, $4c = b^2$. Ainsi, l'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est $\{0\} \cup \{X^2 + bX + \frac{b^2}{4} \,|\, b \in \mathbb{R}\}$.

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(x+1)$. Alors

$$P(0) = P(0{+}1) = P(1) = P(1{+}1) = P(2) = P(2{+}1) = P(3) = P(3{+}1) = P(4) = \dots$$

   donc $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n) = P(0)$ (par récurrence). On pose $Q = P - P(0) \in \mathbb{R}[X]$. Alors Q a une infinité de racines puisque $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) = P(n) - P(0) = 0$. Par conséquent $Q = 0$ et donc P est un polynôme constant. L'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est l'ensemble des polynômes constants.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(P) = 5$, $P + 1$ factorisable par $(X-1)^3$ et $P - 1$ factorisable par $(X+1)^3$. Alors $P(1) + 1 = 0$ et $P(-1) - 1 = 0$, $P'(1) = 0$ et $P'(-1) = 0$, $P''(1) = 0$ et $P''(-1) = 0$. Puisque $\deg(P) = 5$, on a $\deg(P'') = 3$ donc $P'' = (X-1)(X+1)Q$ avec $\deg(Q) = 1$ c'est-à-dire $Q = aX + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$. Ainsi :

$$P'' = (X-1)(X+1)(aX+b) = (X^2-1)(aX+b) = aX^3 + bX^2 - aX - b.$$

   On en déduit que $P' = \frac{a}{4}X^4 + \frac{b}{3}X^3 - \frac{a}{2}X^2 - bX + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Puisque $P'(1) = 0$ et $P'(-1) = 0$, on obtient $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{a}{2} - b + c = 0$ et $\frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{a}{2} + b + c = 0$ donc $2\frac{b}{3} - 2b = 0 \Rightarrow -\frac{4}{3}b = 0 \Rightarrow b = 0$ (en soustrayant les deux lignes) puis $\frac{a}{4} - \frac{a}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{a}{4}$. Ainsi $P' = \frac{a}{4}X^4 - \frac{a}{2}X^2 + \frac{a}{4}$. On en déduit que $P = \frac{a}{20}X^5 - \frac{a}{6}X^3 + \frac{a}{4}X + d$ avec $d \in \mathbb{R}$. Puisque $P(1) = -1$ et $P(-1) = 1$, on obtient

$\frac{a}{20}-\frac{a}{6}+\frac{a}{4}+d=-1 \Rightarrow 2a+15d=-15$ et $-\frac{a}{20}+\frac{a}{6}-\frac{a}{4}+d=1 \Rightarrow -2a+15d=15$ donc $d=0$ et $a=-\frac{15}{2}$ (système de Cramer). Finalement, on obtient :

$$P=-\frac{3}{8}X^5+\frac{5}{4}X^3-\frac{15}{8}X.$$

Exercice 5

1. On a $aX^3+bX^2+cX+d=P=a(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$, d'où en développant :
$$aX^3+bX^2+cX+d=aX^3-a(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)X^2+a(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)X-a\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$
et donc $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=-\frac{b}{a}$, $\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1=\frac{c}{a}$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\frac{d}{a}$.
2. On a :
$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 &= (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\ &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_2\alpha_3+2\alpha_3\alpha_1\\ &= \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1\right)\end{aligned}$$
donc $\left(-\frac{b}{a}\right)^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2\frac{c}{a}$ d'après les résultats de la question précédente. On en déduit que $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.
3. On a $P(0)=d$ donc 0 n'est pas une racine de P si et seulement si $d\neq 0$. Dans ce cas on a :
$$\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_3}=\frac{\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1+\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}=\frac{c/a}{-d/a}=-\frac{c}{d}.$$

Exercice 6

1. $X^4-X^2+1=(X-e^{i\pi/6})(X-e^{7i\pi/6})(X-e^{-i\pi/6})(X-e^{-7i\pi/6})$.
2. $X^4-X^2+1=(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$;
3. $X^8+X^4+1=(X-e^{i\pi/6})(X-e^{2i\pi/3})(X-e^{7i\pi/6})(X-e^{5i\pi/3})(X-e^{-i\pi/6})(X-e^{-2i\pi/3})(X-e^{-7i\pi/6})(X-e^{-5i\pi/3})$.
4. $X^8+X^4+1=(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2-X+1)$.

Exercice 7

$P=(a+3)X^3-aX^2-(a+2)X+a\in\mathbb{R}[X]$ car $a\in\mathbb{R}$. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P tel que $|\alpha|=1$. Si $\alpha\in\mathbb{R}$ alors $\alpha=1$ ou $\alpha=-1$ or $P(1)=(a+3)-a-(a+2)+a=1\neq 0$ et $P(-1)=-(a+3)-a+(a+2)+a=-1\neq 0$ donc $\alpha\notin\mathbb{R}$. Donc $\overline{\alpha}\neq\alpha$ et $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de P car $P\in\mathbb{R}[X]$. Ainsi P est factorisable par $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})=X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+|\alpha|^2=X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+1$. Puisque P est de degré inférieur 3 on en déduit que $P=(X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+1)Q$ où $\deg(Q)\leqslant 1$, c'est-à-dire que Q est de la forme $Q=bX+c$ avec $(b,c)\in\mathbb{R}^2$. Donc :

$$\begin{aligned}(a+3)X^3-aX^2-(a+2)X+a &= P\\ &= (X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+1)(bX+c)\\ &= bX^3+(-2b\mathrm{Re}(\alpha)+c)X^2+(b-2c\mathrm{Re}(\alpha))X+c\end{aligned}$$

ce qui donne en identifiant les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} b &=& a+3\\ -2b\mathrm{Re}(\alpha)+c &=& -a\\ b-2c\mathrm{Re}(\alpha) &=& -(a+2)\\ c &=& a\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} b &=& a+3\\ c &=& a\\ (a+3)\mathrm{Re}(\alpha) &=& \frac{c+a}{2}=a\\ a\mathrm{Re}(\alpha) &=& \frac{b+a+2}{2}=a+\frac{5}{2}\end{array}\right. .$$

L'opération L_3-L_4 donne $3\mathrm{Re}(\alpha)=a-(a+\frac{5}{2})=-\frac{5}{2}$ donc $\mathrm{Re}(\alpha)=-\frac{5}{6}$. En remplaçant cette valeur dans L_4, on obtient $-\frac{5}{6}a=a+\frac{5}{2}$ c'est-à-dire $a=-\frac{5/2}{1+5/6}=-\frac{15}{11}$. Donc s'il existe $\alpha\in\mathbb{C}$ une racine de P tel que $|\alpha|=1$ alors $a=-\frac{15}{11}$. Réciproquement, si $a=-\frac{15}{11}$ alors

$$\begin{aligned}P &= \left(-\frac{15}{11}+3\right)X^3+\frac{15}{11}X^2-\left(-\frac{15}{11}+2\right)X-\frac{15}{11}\\ &= \frac{1}{11}\left(18X^3+15X^2-7X-15\right)\\ &= \frac{1}{11}\left(X^2+\frac{5}{3}X+1\right)(18X-15)\\ &\quad \text{(car on sait que } P \text{ est factorisable par } X^2-2\mathrm{Re}(\alpha)X+1 \text{ avec } \mathrm{Re}(\alpha)=-\frac{5}{6})\\ &= \frac{18}{11}\left(X-\left(-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\right)\left(X-\left(-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)\right)\left(X-\frac{5}{6}\right)\end{aligned}$$

avec $\left|-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{11}}{6}\right|=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{11}{36}}=1$. Par conséquent la seule valeur de a pour laquelle P admet une racine de module 1 est $a=-\frac{15}{11}$.