Feuille de TD n° 16

Limites de fonctions réelles

Exercice 1

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et de $+\infty$.

1. Montrer que si f a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ alors ℓ est unique.
2. Même question dans le cas où $\lim_a f = \ell \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

Déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto x^x \qquad f_6 : x \mapsto \frac{\sin(6x)}{e^{x/7} - 1}$$

$$f_2 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_7 : x \mapsto \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} \qquad f_8 : x \mapsto (1 + \tan(x))^{1/\sin(x)}$$

$$f_4 : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x^2} \qquad f_9 : x \mapsto \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$$

$$f_5 : x \mapsto x\left|1 + \frac{1}{x}\right| \qquad f_{10} : x \mapsto \frac{\ln(\cos(x))}{1 - \cos(2x)}$$

Exercice 3

Déterminer, si elles existent, les limites en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \qquad f_6 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$f_2 : x \mapsto x - \ln(x^2 + 1) \qquad f_7 : x \mapsto \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2+x+1}$$

$$f_3 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f_8 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} \qquad f_9 : x \mapsto \frac{6\ln(e^{7x} + x^8 + 9x)}{x}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\ln(3^x - 2^x)}{x} \qquad f_{10} : x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}} - x$$

Exercice 4

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{x - \sqrt{x}} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^4 - 3x + 2}$$

$$\lim_{x \to \pi/4} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{4x - \pi} \qquad \lim_{x \to \pi/2} \tan(x)\tan(2x)$$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. Montrer que $f \sim_a g \iff f = g + o_a(g)$.
2. Montrer que $f = o_a(g) \iff (f + g) \sim_a g$.

Exercice 6

Déterminer un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 6x^5 + 4x^3 + 2x \qquad f_3 : x \mapsto \ln(\cos(x))$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \qquad f_4 : x \mapsto e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}$$

Exercice 7

Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto 6x^5 + 4x^3 + 2x \qquad f_3 : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - x + 1}$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \qquad f_4 : x \mapsto x\ln(1 + x^2) - 2x\ln(x)$$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Démontrer que $\lim_a(f - g) = 0$ si et seulement si $\exp(f) \sim_a \exp(g)$. Donner un exemple tel que $f \not\sim_a g$.

Exercice 9

Soient f et g deux fonctions strictement positives définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Démontrer que si $f \sim_a g$ et $\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \setminus \{1\}$ alors $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ (on pourra distinguer les cas $\ell = 0$, $\ell \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$ et $\ell = +\infty$). Donner un contre-exemple dans le cas où $\ell = 1$.