Corrigé de la feuille de TD n° 16

Comportement asymptotique de suites réelles

Exercice 1

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = 0$ car $\left|\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}\right| \leqslant 2$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\left|\frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \cdots \times \frac{n}{n}\right| \leqslant 1 \times 1 \times \cdots \times 1$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$
   donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} = +\infty$ par comparaison.
4. Par étude de fonction, $x \mapsto \ln(x)/x$ est décroissante pour $x \geqslant e$ donc
   $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3} + \frac{(n-3)}{n} \ln(n)$.
   Or $\frac{(n-3)}{n} \ln(n) \sim \ln(n)$ donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = +\infty$ par comparaison.
5. $\lim_{n\to+\infty} y_n = x$ car $x \geqslant 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \geqslant 10^{-n}(10^n x - 1) = x - 10^{-n}$.

Exercice 2

1. $(2n^4 - 3n^2 + 4 - 5\ln(n))\left(-\frac{1}{6}\right)^n \sim 2n^4\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.
2. $\ln\left(\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{n^2+n}{n^3+1}\right) \sim \frac{n^2+n}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$.
3. $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} - 1\right) \sim \sqrt{n+1} \times \frac{1}{2(n+1)} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
4. $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} - 1 = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) - 1 \sim \sqrt{n}\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{-\sqrt{n}}{n+1} \sim -\frac{1}{\sqrt{n}}$.
5. $\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1 = \sqrt{1 + \left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right)} - 1 \sim \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) \sim \frac{1}{2} \times \frac{-\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{2} = -\frac{1}{4n^4}$.

Exercice 3

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n+4n^5}{5\ln(n)-3^n} = 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3+1)}{n+1} = 0$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right) = \frac{1}{4}$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+2} = \frac{3}{2}$.
5. $\lim_{n\to+\infty} n^5 \ln(1 + e^{-n}) = 0$.
6. $\lim_{n\to+\infty} n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{2}$.
7. $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.
8. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n} = e^{-3}$.
9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{2/n^2}-1)\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)}{\sin\left(\frac{3}{n^3}\right)} = -\frac{1}{3}$.
10. $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 4

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.
2. $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{3}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 5

On pose $(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geqslant 0}$ et $\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n$. On a pour tout $n \geqslant 0$: $S_{n+1}-S_n = u_n$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell - \ell = 0$.