Corrigé de la feuille de TD n$^{\text{o}}$ 16

Limites de fonctions réelles

Exercice 1

Soit f une fonction réelle définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et de $+\infty$.

1. On suppose par l'absurde que f a pour limite ℓ et ℓ' en $+\infty$ avec $\ell < \ell'$. On a donc :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ x \geqslant A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0,\ \exists A' > 0,\ \forall x' \in \mathcal{D}_f,\ x' \geqslant A' \Rightarrow |f(x') - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{array} \right. .$$
On choisit $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{\ell'-\ell}{3} > 0$. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $x \geqslant \max\{A, A'\}$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \\ \ell' - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell' + \varepsilon \end{array} \right.$$
en particulier $\frac{\ell'+2\ell}{3} = \ell + \varepsilon \geqslant f(x) \geqslant \ell' - \varepsilon = \frac{2\ell'+\ell}{3}$ et donc $\ell \geqslant \ell'$ ce qui est absurde.
2. On suppose par l'absurde que f a pour limite ℓ et ℓ' en a avec $\ell < \ell'$. On a donc :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0,\ \exists \eta' > 0,\ \forall x' \in \mathcal{D}_f,\ |x' - a| \leqslant \eta' \Rightarrow |f(x') - \ell'| \leqslant \varepsilon \end{array} \right. .$$
On choisit $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{\ell'-\ell}{3} > 0$. Alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $|x - a| \leqslant \min\{\eta, \eta'\}$, on a :
$$\left\{ \begin{array}{l} \ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon \\ \ell' - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell' + \varepsilon \end{array} \right.$$
en particulier $\frac{\ell'+2\ell}{3} = \ell + \varepsilon \geqslant f(x) \geqslant \ell' - \varepsilon = \frac{2\ell'+\ell}{3}$ et donc $\ell \geqslant \ell'$ ce qui est absurde.

Exercice 2

1. $\lim_{x\to 0} x^x = 1$
2. $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $\lim_{x\to 0} \ln(x) + \frac{1}{x^2} = +\infty$
5. $\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} x \left|1 + \frac{1}{x}\right| = +1 \\ \lim_{x\to 0^-} x \left|1 + \frac{1}{x}\right| = -1 \end{array} \right.$
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x)}{e^{x/7}-1} = 42$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} = -1$
8. $\lim_{x\to 0} (1 + \tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} = e$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$
10. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{1-\cos(2x)} = -\frac{1}{4}$

Exercice 3

1. $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
2. $\lim_{x\to +\infty} x - \ln(x^2 + 1) = +\infty$
3. $\lim_{x\to +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|} = 1$
5. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(3^x-2^x)}{x} = \ln(3)$
6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$
7. $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2+x+1} = e^{-2}$
8. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$
9. $\lim_{x\to +\infty} \frac{6\ln(e^{7x}+x^8+9x)}{x} = 42$
10. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}} - x = \frac{1}{3}$

Exercice 4

1. $\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-\sqrt{x}} = 2e$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-2x+1}{x^4-3x+2} = 3$
3. $\lim_{x\to \pi/4} \frac{\cos(x)-\sin(x)}{4x-\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
4. $\lim_{x\to \pi/2} \tan(x)\tan(2x) = -2$

Exercice 5

Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1. On suppose que $f \sim_a g$, donc $\lim_a \frac{f}{g} = 1$. En particulier, $\lim_a \frac{f-g}{g} = \lim_a \frac{f}{g} - 1 = 0$ donc $f - g = o_a(g)$ et par conséquent $f = g + o_a(g)$. Réciproquement, on suppose que $f = g + o_a(g)$, donc $f - g = o_a(g)$ c'est-à-dire $\lim_a \frac{f-g}{g} = 0$. En particulier, $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f-g}{g} + 1 = 1$ donc $f \sim_a g$.
2. On suppose que $f = o_a(g)$, donc $\lim_a \frac{f}{g} = 0$. En particulier, $\lim_a \frac{f+g}{g} = \lim_a \frac{f}{g} + 1 = 1$ donc $(f + g) \sim_a g$. Réciproquement, on suppose que $(f + g) \sim_a g$ donc $\lim_a \frac{f+g}{g} = 1$. En particulier, $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f+g}{g} - 1 = 0$ donc $f = o_a(g)$.

Exercice 6

1. $6x^5 + 4x^3 + 2x \sim_{x\to 0} 2x$
2. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$
3. $\ln(\cos(x)) \sim_{x\to 0} -\frac{x^2}{2}$
4. $\left(e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}\right) \sim_{x\to 0} \frac{x^3}{2}$

Exercice 7

1. $6x^5 + 4x^3 + 2x \sim_{x\to +\infty} 6x^5$
2. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$
3. $2x - \sqrt{4x^2 - x + 1} \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{4}$
4. $x\ln(1+x^2) - 2x\ln(x) \sim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_a (f-g) = 0$. Alors $\lim_a \frac{\exp(f)}{\exp(g)} = \lim_a \exp(f-g) = 1$ par composition des limites, donc $\exp(f) \sim_a \exp(g)$. Réciproquement, on suppose que $\exp(f) \sim_a \exp(g)$ donc $\lim_a \exp(f-g) = 1$. Alors $\lim_a (f-g) = \lim_a \ln(\exp(f-g)) = 0$ par composition des limites. Par exemple avec $a = 0$, on a $\exp(x) \sim_{x\to 0} \exp(x^2)$ (et $\sim_{x\to 0} 1$) mais $x \not\sim_{x\to 0} x^2$.

Exercice 9

Soient f et g deux fonctions strictement positives définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $f \sim_a g$ et $\lim_a f = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \setminus \{1\}$.

1^er^cas : $\ell = 0$. On a pour tout x au voisinage de a :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}.$$

Or $f \sim_a g$ donc $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ et par conséquent $\lim_{x\to a} \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$ par composition de limites. De plus, $\lim_a g = \ell$ donc $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ et par conséquent $\lim_{x\to a} \ln(g(x)) = -\infty$ par composition de limites. On en déduit que $\lim_{x\to a} \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 0$ donc $\lim_{x\to a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$, c'est-à-dire $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

2^e^cas : $\ell \in \mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$. Alors $\lim_{x\to a} \ln(f(x)) = \lim_{x\to a} \ln(g(x)) = \ln(\ell)$ donc $\lim_{x\to a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$ et par conséquent $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

3^e^cas : $\ell = +\infty$. On a $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$ et $\lim_a \frac{1}{f} = 0$. D'après le 1^er^cas, on a $\ln\left(\frac{1}{f}\right) \sim_a \ln\left(\frac{1}{g}\right)$. Or $\ln\left(\frac{1}{f}\right) = -\ln(f)$ et $\ln\left(\frac{1}{g}\right) = -\ln(g)$, d'où $\ln(f) \sim_a \ln(g)$.

Par exemple avec $a = 0$, on a $(1+x) \sim_{x\to 0} (1+x^2)$ (et $\sim_{x\to 0} 1$) mais $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x \not\sim_{x\to 0} x^2 \sim_{x\to 0} \ln(1+x^2)$.