

# Feuille de TD n° 17

## Polynômes réels

### Exercice 1

Dire si chacune des fonctions suivantes est polynomiale et justifier votre réponse.

1.  $f_1 : x \mapsto \sin(x)$
2.  $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$
3.  $f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$
4.  $f_4 : x \mapsto \exp(x)$
5.  $f_5 : x \mapsto \frac{(x+1)^{42} - (1-x)^{42}}{x}$
6.  $f_6 : x \mapsto \cos(42 \arccos(x))$  (pour  $x \in ]-1, 1[$ )

### Exercice 2

1. Démontrer que tous les coefficients d'indices impairs d'un polynôme pair sont nuls.
2. Démontrer un résultat similaire pour les polynômes impairs.

### Exercice 3

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On pose  $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ .

1. Montrer que  $P'_{n+1} = P_n$ .
2. Montrer que  $P_n$  n'a pas de racines multiples.
3. Déterminer le nombre de racines réelles de  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ .
4. Conjecturer le nombre de racines réelles de  $P_n$  et démontrer cette conjecture par récurrence.

### Exercice 4

Pour chacune des relations suivantes, déterminer tous les polynômes  $P$  la vérifiant.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x)^2 = 4P(x)$
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = P(x + 1)$

### Exercice 5

Déterminer tous les polynômes  $P$  de degré 5 tels que  $x \mapsto P(x) + 1$  est factorisable par  $x \mapsto (x - 1)^3$  et  $x \mapsto P(x) - 1$  est factorisable par  $x \mapsto (x + 1)^3$ .

### Exercice 6

Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  avec  $a \neq 0$ . On suppose que le polynôme  $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$  admet trois racines réelles qu'on note  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

1. Calculer en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ , les expressions  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1$  et  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ .
2. En développant  $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2$ , calculer en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ , l'expression  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ .
3. On suppose que  $d \neq 0$ , donc que 0 n'est pas une racine de  $P$ . Calculer en fonction de  $a, b, c$  et  $d$ , l'expression  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}$ .

### Exercice 7

Factoriser les polynômes réels suivants :

1.  $P_1 : x \mapsto x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2$
2.  $P_2 : x \mapsto x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 9x + 6$
3.  $P_3 : x \mapsto x^4 - 8x^2 + 15$
4.  $P_4 : x \mapsto x^4 - x^2 + 1$ .