Corrigé de la feuille de TD n° 17

Polynômes réels

Exercice 1 (polynômes)

1. Si $f_1 : x \mapsto \sin(x)$ est une fonction polynomiale alors f_1 a une infinité de racines car $\sin(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc f_1 serait le polynôme nul ce qui est absurde car $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \neq 0$.
2. Si $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction polynomiale alors f_2 serait continue sur tout $\mathbb{R}$, en particulier en 0 ce qui est absurde car $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
3. Si $f_3 : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est une fonction polynomiale alors f_3 serait le polynôme nul car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$ ce qui est absurde car $f_3(0) = 1 \neq 0$.
4. Si $f_4 : x \mapsto \exp(x)$ est une fonction polynomiale alors f_4 serait le polynôme nul car $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ ce qui est absurde car $\exp(0) = 1 \neq 0$.
5. On a d'après la formule du binôme de Newton pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned}
f_5(x) &= \frac{1}{x}\left((x+1)^{42} - (1-x)^{42}\right) = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}x^k - \sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}(-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - (-x)^k\right)\\
&= \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k - x^k\right) + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\left(x^k + x^k\right)\\
&= 0 + \frac{1}{x}\sum_{\substack{k=0\\k=2n+1}}^{42}\binom{42}{k}2x^k = \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{20}\binom{42}{2n+1}x^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{20}\binom{42}{2n+1}x^{2n}
\end{aligned}$$

donc f_5 est bien une application polynomiale.

6. On a d'après la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton pour tout $x \in]-1,1[$ et en posant $\theta = \arccos(x)$:

$$\begin{aligned}
f_6(x) &= \cos(42\theta) = \mathrm{Re}\left(\cos(42\theta) + i\sin(42\theta)\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{42}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{42}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)(i\sin(\theta))^{42-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)\sin^{42-k}(\theta)(i)^{42-k}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{42}\binom{42}{k}\cos^k(\theta)\sin^{42-k}(\theta)(i)^{42-k}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}\cos^{2n}(\theta)\sin^{42-2n}(\theta)(i)^{42-2n}\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{k=0}^{20}\binom{42}{2n+1}\cos^{2n+1}(\theta)\sin^{42-2n-1}(\theta)(i)^{42-2n-1}\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}\cos^{2n}(\theta)\sin^{42-2n}(\theta)(-1)^{21-n}\right.\\
&\qquad\qquad \left. - i\sum_{k=0}^{20}\binom{42}{2n+1}\cos^{2n+1}(\theta)\sin^{42-2n-1}(\theta)(-1)^{21-n}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}(\cos(\theta))^{2n}(\sin^2(\theta))^{21-n}(-1)^{21-n}\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}(\cos(\arccos(x)))^{2n}(1-(\cos(\arccos(x))^2)^{21-n}(-1)^{21-n}\\
&= \sum_{n=0}^{21}\binom{42}{2n}x^{2n}(1-x^2)^{21-n}(-1)^{21-n}
\end{aligned}$$

donc f_6 est bien une application polynomiale.

Exercice 2

1. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Si P est pair alors $P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k$. Ce qui donne en identifiant les coefficients : $a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, si k est impair on a $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$.
2. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme. Si P est impair alors $-P(x) = P(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $-\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k x^k$.

Ce qui donne en identifiant les coefficients : $-a_k = a_k(-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, si k est pair on a $-a_k = a_k$ donc $a_k = 0$.

Exercice 3

1. On a $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} x^k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc :
$$P'_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{k!} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k-1)!} x^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} x^\ell = P_n(x)$$
en posant $\ell = k-1$. Donc $P'_{n+1} = P_n$.
2. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine multiple de P_n. Par conséquent $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0$. Or on a :
$$0 = P_n(\alpha) - P'_n(\alpha) = P_n(\alpha) - P_{n-1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \alpha^k = \frac{1}{n!} \alpha^n.$$
On en déduit que $\alpha = 0$. Mais ceci est absurde car $P_n(0) = 1$. Il n'existe donc pas de racines multiples de P_n.
3. $P_0 : x \mapsto 1$ n'a pas de racine. $P_1 : x \mapsto 1 + x$ admet une seule racine : $x = -1$. $P_2 : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2}$ n'a pas de racines car son discriminant est égal à $\Delta = -1 < 0$. Puisque $P_2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que P_3 est strictement croissante. De plus, $P_3 : x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \sim \frac{x^3}{6}$ donc $\lim_{x\to-\infty} P_3(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_3(x) = +\infty$. Par conséquent, P_3 admet une seule racine d'après le théorème de la bijection.
4. On conjecture que P_n n'a pas de racine si n est pair et admet une seule racine si n est impair. On a déjà démontré l'initialisation pour $n = 0$. On suppose le résultat vrai pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé.
<u>1^er^cas : n est pair</u>. Puisque P_n n'a pas de racine d'après l'hypothèse de récurrence et que $P_n(0) = 1$, on en déduit que $P'_{n+1}(x) = P_n(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc que P_{n+1} est strictement croissante. De plus, $P_{n+1}(x) \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ donc $\lim_{x\to-\infty} P_{n+1}(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$. Par conséquent, P_{n+1} admet une unique racine d'après le théorème de la bijection.
<u>2^e^cas : n est impair</u>. D'après l'hypothèse de récurrence, P_n admet une seule racine. Si on la note α, on a $P_n(x) < 0$ pour tout $x < \alpha$ (car $\lim_{x\to-\infty} P_n(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n}{n!} = -\infty$) et $P_n(x) > 0$ pour tout $x > \alpha$ (car $\lim_{x\to+\infty} P_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = +\infty$). On en déduit que P_{n+1} admet un minimum en α qui vaut :
$$P_{n+1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \alpha^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \alpha^k}_{=P_n(\alpha)=0} + \frac{1}{(n+1)!} \alpha^{n+1} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$
car $n+1$ est pair et $\alpha \neq 0$ (car 0 n'est pas racine de P_n puisque $P_n(0) = 1$). Par conséquent, P_{n+1} n'a pas de racine. D'où le résultat par récurrence.

Exercice 4

1. Si $P = 0$ alors $P(x^2) = 0 = (x^2+1)P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $P \neq 0$ de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $2n = \deg(P(x^2)) = \deg((x^2+1)P(x)) = 2 + n$. Donc $n = 2$ et P est de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} ax^4 + bx^2 + c &= P(x^2) \\ &= (x^2+1)P(x) \\ &= (x^2+1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4 + bx^3 + (c+a)x^2 + bx + c \end{aligned}$$
ce qui donne par identification des coefficients : $a = a$, $b = 0$, $a + c = b$ donc $c = -a$, $b = 0$, $c = c$. Ainsi, l'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est $\{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto ax^2 - a \,|\, a \in \mathbb{R}^\star\}$.
2. Si $P = 0$ alors $P'(x)^2 = 0 = 4P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit maintenant $P \neq 0$ de degré $n \in \mathbb{N}$ tel que $P'(x)^2 = 4P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $2(n-1) = \deg(P'(x)^2) = \deg(4P(x)) = n$. Donc $n = 2$ et P est de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$4ax^2 + 4bx + 4c = 4P(x) = P'(x)^2 = (2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4abx + b^2$$
ce qui donne par identification des coefficients : $4a = 4a^2$ donc $a = 1$ (car $a \neq 0$), $4b = 4ab$ donc $b = b$, $4c = b^2$. Ainsi, l'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est $\{x \mapsto 0\} \cup \{x \mapsto x^2 + bx + \frac{b^2}{4} \,|\, b \in \mathbb{R}\}$.
3. Soit P tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = P(x+1)$. Alors
$$P(0) = P(0+1) = P(1) = P(1+1) = P(2) = P(2+1) = P(3) = P(3+1) = \dots$$
On peut donc montrer par récurrence que $P(n) = P(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $Q : x \mapsto P(x) - P(0)$. Alors Q a une infinité de racines puisque $Q(n) = P(n) - P(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent $Q = 0$ et donc P est un polynôme constant. L'ensemble des polynômes qui vérifient la relation est l'ensemble des polynômes constants.

Exercice 5

Soit P un polynôme de degré 5 tel que $x \mapsto P(x) + 1$ est factorisable par $x \mapsto (x-1)^3$ et $x \mapsto P(x) - 1$ est factorisable par $x \mapsto (x+1)^3$. Alors 1 est une racine triple de $P + 1$, donc $P(1) + 1 = P'(1) + 0 = P''(1) + 0 = 0$. De même, $P(-1) - 1 = P'(-1) - 0 = P''(-1) - 0 = 0$. Puisque $\deg(P) = 5$, on a $\deg(P'') = 3$ donc $P'' : x \mapsto (x-1)(x+1)Q(x)$ avec $\deg(Q) = 1$ c'est-à-dire $Q : x \mapsto ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 0$. Ainsi :
$$P'' : x \mapsto (x-1)(x+1)(ax+b) = (x^2-1)(ax+b) = ax^3 + bx^2 - ax - b.$$
On en déduit que $P' : x \mapsto \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 - bx + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Puisque $P'(1) = P'(-1) = 0$, on obtient $\frac{a}{4} + \frac{b}{3} - \frac{a}{2} - b + c = 0$ et $\frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{a}{2} + b + c = 0$ donc $2\frac{b}{3} - 2b = 0 \Rightarrow$

$-\frac{4}{3}b = 0 \Rightarrow b = 0$ (en soustrayant les deux lignes) puis $\frac{a}{4} - \frac{a}{2} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{a}{4}$. Ainsi $P' : x \mapsto \frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{2}x^2 + \frac{a}{4}$. On en déduit que $P : x \mapsto \frac{a}{20}x^5 - \frac{a}{6}x^3 + \frac{a}{4}x + d$ avec $d \in \mathbb{R}$. Puisque $P(1) = -1$ et $P(-1) = 1$, on obtient $\frac{a}{20} - \frac{a}{6} + \frac{a}{4} + d = -1 \Rightarrow 2a + 15d = -15$ et $-\frac{a}{20} + \frac{a}{6} - \frac{a}{4} + d = 1 \Rightarrow -2a + 15d = 15$ donc $d = 0$ et $a = -\frac{15}{2}$ (en résolvant un système linéaire de deux équations à deux inconnues). Finalement, on obtient :

$$P : x \mapsto -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Exercice 6

1. On a $P : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)$, d'où en développant pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 - a(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + a(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)x - a\alpha_1\alpha_2\alpha_3$$

   et donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a}$, $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \frac{c}{a}$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a}$.
2. On a :

   $$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_3\alpha_1 \\ &= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\left(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1\right) \end{aligned}$$

   donc $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\frac{c}{a}$ d'après les résultats de la question précédente. On en déduit que $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$.
3. On a :

   $$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{c/a}{-d/a} = -\frac{c}{d}.$$

Exercice 7

On a :

1. $P_1 : x \mapsto x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = (x-1)^3(x^2+2)$
2. $P_2 : x \mapsto x^5 - 6x^3 - 2x^2 + 9x + 6 = (x+1)^2(x-2)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
3. $P_3 : x \mapsto x^4 - 8x^2 + 15 = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
4. $P_4 : x \mapsto x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)$