

## Continuité

**Exercice 1**

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les domaines de définition, étudier la continuité et déterminer si elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1 : x \mapsto \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x+3}}$$

$$f_4 : x \mapsto (2^x - 2) \ln|1-x|$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{\ln(x+1)}$$

**Exercice 2**

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) = f(1)$ . Pour tout  $T > 0$ , on considère l'équation  $f(t+T) = f(t)$  d'inconnue  $t \in [0, 1-T]$ .

- Pour  $T = \frac{1}{2}$ , montrer qu'il existe au moins une solution.
- On considère  $T = \frac{1}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .
  - Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} (f(\frac{k}{n} + T) - f(\frac{k}{n}))$ .
  - En déduire que l'équation admet au moins une solution.
- Lors d'une balade, un écuyer a parcouru 12km en 1h à différentes allures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 5min pendant lequel l'écuyer a parcouru la même distance que si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade.

**Exercice 3**

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue.

- Montrer qu'il existe un point  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .
- Montrer que si  $f$  est décroissante, alors  $c$  est unique.
- Qu'en est-il si  $f$  est croissante ?

**Exercice 4**

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que :

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $I$ .
- On suppose que  $k \in ]0, 1[$  et on suppose qu'il existe  $\ell \in I$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .
  - Montrer que  $\ell$  est unique.
  - On définit une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par  $u_0 \in I$  et la relation de récurrence  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrer que  $\forall n \geq 0, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$  et en déduire la limite de  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 5**

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- Montrer que si  $\lim_{+\infty} f$  existe et est finie, alors  $f$  est bornée.
- Montrer que si  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ , alors  $f$  est minorée et sa borne inférieure est atteinte.
- Montrer que si  $f(0) < 0$  et que  $\lim_{+\infty} f$  existe et est strictement positive, alors  $f$  s'annule au moins une fois sur  $]0, +\infty[$ .
- Montrer à l'aide de contre-exemples que les réciproques des affirmations précédentes sont fausses.

**Exercice 6**

Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $x = e^{\lambda x}$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  en fonction du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 7**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que chaque  $y \in \mathbb{R}$  admet au plus deux antécédents par  $f$ . Montrer qu'il existe au moins un  $y_0 \in \mathbb{R}$  qui admet exactement un seul antécédent par  $f$ . (*Indication* : faire des dessins!!!)