

# Limites de fonctions réelles d'une variable

## Exercice 1

Soit  $f$  une fonction réelle définie au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$  et de  $+\infty$ .

- On suppose par l'absurde que  $f$  a pour limite  $\ell$  et  $\ell'$  en  $+\infty$  avec  $\ell < \ell'$ . On a donc :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0, \exists A' > 0, \forall x' \in \mathcal{D}_f, x' \geq A' \Rightarrow |f(x') - \ell'| \leq \varepsilon' \end{cases} .$$

On choisit  $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$ . Alors pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$  tel que  $x \geq \max\{A, A'\}$ , on a :

$$\begin{cases} \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \\ \ell' - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell' + \varepsilon \end{cases}$$

en particulier  $\frac{\ell' + 2\ell}{3} = \ell + \varepsilon \geq f(x) \geq \ell' - \varepsilon = \frac{2\ell' + \ell}{3}$  et donc  $\ell \geq \ell'$  ce qui est absurde.

- On suppose par l'absurde que  $f$  a pour limite  $\ell$  et  $\ell'$  en  $a$  avec  $\ell < \ell'$ . On a donc :

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon \\ \forall \varepsilon' > 0, \exists \eta' > 0, \forall x' \in \mathcal{D}_f, |x' - a| \leq \eta' \Rightarrow |f(x') - \ell'| \leq \varepsilon' \end{cases} .$$

On choisit  $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$ . Alors pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$  tel que  $|x - a| \leq \min\{\eta, \eta'\}$ , on a :

$$\begin{cases} \ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \\ \ell' - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell' + \varepsilon \end{cases}$$

en particulier  $\frac{\ell' + 2\ell}{3} = \ell + \varepsilon \geq f(x) \geq \ell' - \varepsilon = \frac{2\ell' + \ell}{3}$  et donc  $\ell \geq \ell'$  ce qui est absurde.

## Exercice 2

- $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) + \frac{1}{x^2} = +\infty$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left|1 + \frac{1}{x}\right| = +1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left|1 + \frac{1}{x}\right| = -1 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{e^{x/7} - 1} = 42$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(x))^{\frac{1}{\sin(x)}} = e$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x))}{1 - \cos(2x)} = -\frac{1}{4}$

## Exercice 3

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln(x^2 + 1) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - |x|}{x^2 + |x|} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3^x - 2^x)}{x} = \ln(3)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2 + x + 1} = e^{-2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 \ln(e^{7x} + x^8 + 9x)}{x} = 42$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-1}} - x = \frac{1}{3}$

## Exercice 4

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - \sqrt{x}} = 2e$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^4 - 3x + 2} = 3$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos(x) - \sin(x)}{4x - \pi} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan(x) \tan(2x) = -2$

## Exercice 5

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies au voisinage de  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

- On suppose que  $f \sim_a g$ , donc  $\lim_a \frac{f}{g} = 1$ . En particulier,  $\lim_a \frac{f-g}{g} = \lim_a \frac{f}{g} - 1 = 0$  donc  $f - g = o_a(g)$  et par conséquent  $f = g + o_a(g)$ . Réciproquement, on suppose que  $f = g + o_a(g)$ , donc  $f - g = o_a(g)$  c'est-à-dire  $\lim_a \frac{f-g}{g} = 0$ . En particulier,  $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f-g}{g} + 1 = 1$  donc  $f \sim_a g$ .
- On suppose que  $f = o_a(g)$ , donc  $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ . En particulier,  $\lim_a \frac{f+g}{g} = \lim_a \frac{f}{g} + 1 = 1$  donc  $(f+g) \sim_a g$ . Réciproquement, on suppose que  $(f+g) \sim_a g$  donc  $\lim_a \frac{f+g}{g} = 1$ . En particulier,  $\lim_a \frac{f}{g} = \lim_a \frac{f+g}{g} - 1 = 0$  donc  $f = o_a(g)$ .

### Exercice 6

- $6x^5 + 4x^3 + 2x \sim_{x \rightarrow 0} 2x$
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3}$
- $\ln(\cos(x)) \sim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2}{2}$
- $(e^{\tan(x)} - e^{\sin(x)}) \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2}$

### Exercice 7

- $6x^5 + 4x^3 + 2x \sim_{x \rightarrow +\infty} 6x^5$
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$
- $2x - \sqrt{4x^2 - x + 1} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$
- $x \ln(1 + x^2) - 2x \ln(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

### Exercice 8

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . On suppose que  $\lim_a (f - g) = 0$ . Alors  $\lim_a \frac{\exp(f)}{\exp(g)} = \lim_a \exp(f - g) = 1$  par composition des limites, donc  $\exp(f) \sim_a \exp(g)$ . Réciproquement, on suppose que  $\exp(f) \sim_a \exp(g)$  donc  $\lim_a \exp(f - g) = 1$ . Alors  $\lim_a (f - g) = \lim_a \ln(\exp(f - g)) = 0$  par composition des limites. Par exemple avec  $a = 0$ , on a  $\exp(x) \sim_{x \rightarrow 0} \exp(x^2)$  (et  $\sim_{x \rightarrow 0} 1$ ) mais  $x \not\sim_{x \rightarrow 0} x^2$ .

### Exercice 9

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions strictement positives définies au voisinage de  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . On suppose que  $f \sim_a g$  et  $\lim_a f = \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \setminus \{1\}$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $\ell = 0$ . On a pour tout  $x$  au voisinage de  $a$  :

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln\left(g(x) \frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(g(x)) + \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))}.$$

Or  $f \sim_a g$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow a} \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = 0$  par composition de limites. De plus,  $\lim_a g = \ell$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$  et par conséquent  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(g(x)) = -\infty$  par composition de limites. On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{\ln(g(x))} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$ , c'est-à-dire  $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ .

**2<sup>e</sup> cas :**  $\ell \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow a} \ln(f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} \ln(g(x)) = \ln(\ell)$  donc  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = 1$  et par conséquent  $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ .

**3<sup>e</sup> cas :**  $\ell = +\infty$ . On a  $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$  et  $\lim_a \frac{1}{f} = 0$ . D'après le 1<sup>er</sup> cas, on a  $\ln\left(\frac{1}{f}\right) \sim_a \ln\left(\frac{1}{g}\right)$ .

Or  $\ln\left(\frac{1}{f}\right) = -\ln(f)$  et  $\ln\left(\frac{1}{g}\right) = -\ln(g)$ , d'où  $\ln(f) \sim_a \ln(g)$ .

Par exemple avec  $a = 0$ , on a  $(1 + x) \sim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)$  (et  $\sim_{x \rightarrow 0} 1$ ) mais  $\ln(1 + x) \sim_{x \rightarrow 0} x \not\sim_{x \rightarrow 0} x^2 \sim_{x \rightarrow 0} \ln(1 + x^2)$ .