

## Continuité

### Exercice 1

- $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^*$  et  $f_1$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  par produit et composition de fonctions usuelles. De plus,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$  d'après le théorème d'encadrement car  $\forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq |f_1(x)| \leq |\sin(x)|$ . Donc  $f_1$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f_1(0) = 0$ .
- $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$  et  $f_2$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$  par somme et inverse de fonctions usuelles non nulles. De plus,  $f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$  donc  $\lim_{x \rightarrow -1} f_2(x)$  n'existe pas et  $\lim_{x \rightarrow +1} f_2(x) = -\frac{1}{2}$ . Par conséquent,  $f_2$  ne se prolonge pas par continuité en  $-1$  mais se prolonge par continuité en  $+1$  en posant  $f_2(1) = -\frac{1}{2}$ .
- $\mathcal{D}_{f_3} = ]-3, +\infty[$  et  $f_3$  est continue sur  $] -3, +\infty[$  par composition et quotient (dont le dénominateur est non nul) de fonctions usuelles. De plus :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3^+} f_3(x) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} f(y-3) \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(y-3)^2 + 4(y-3) + 3}{\sqrt{y}} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y^2 - 2y}{\sqrt{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y}(y-2) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $f_3$  se prolonge par continuité en  $-3$  en posant  $f_3(-3) = 0$ .

- $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$  et  $f_4$  est continue sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par produit et composition de fonctions usuelles. On a en posant  $x = 1-y : 2^x - 2 = 2^{1-y} - 2 = 2(2^{-y} - 1) \sim_{y \rightarrow 0} -2 \ln(2)y$ , donc, d'après le théorème des croissances comparées :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f_4(x) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} f_4(1-y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} (2^{1-y} - 2) \ln |y| \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} -2 \ln(2)y \ln(y) = 0 \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f_4(x) &= \lim_{y \rightarrow 0^-} f_4(1-y) = \lim_{y \rightarrow 0^-} (2^{1-y} - 2) \ln |y| \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} -2 \ln(2)y \ln(-y) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_4$  se prolonge par continuité en 1 en posant  $f_4(1) = 0$ .

- $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}_+^*$  et  $f_5$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  par composition et quotient (dont le dénominateur est non nul) de fonctions usuelles. De plus  $\cos(\sqrt{x}) - 1 \sim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{(\sqrt{x})^2}{2} = -\frac{x}{2}$

et  $\ln(x+1) \sim_{x \rightarrow 0^+} x$  donc  $f_5(x) \sim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2}$ . Par conséquent,  $f_5$  se prolonge par continuité en 0 en posant  $f_5(0) = -\frac{1}{2}$ .

### Exercice 2

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que  $f(0) = f(1)$ . Pour tout  $T > 0$ , on considère l'équation  $f(t+T) = f(t)$  d'inconnue  $t \in [0, 1-T]$ .

- On considère la fonction  $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t + \frac{1}{2}) - f(t)$ . La fonction  $g$  est continue sur le segment  $[0, \frac{1}{2}]$  par composition et somme de fonctions continues. Puisque  $f(0) = f(1)$ , on a :

$$\begin{aligned} g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right) \left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right) \left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Si  $g(0)g(\frac{1}{2}) = 0$  alors  $f(\frac{1}{2}) = f(0)$  et donc  $t = 0$  est solution de l'équation  $f(t + \frac{1}{2}) = f(t)$ . Sinon  $g(0)g(\frac{1}{2}) < 0$  donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe au moins un  $t \in [0, \frac{1}{2}]$  tel que  $g(t) = 0$ , c'est-à-dire une solution de l'équation  $f(t + \frac{1}{2}) = f(t)$ .

- On considère  $T = \frac{1}{n}$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

(a) On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{k}{n} + T\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) \\ &= f(1) - f(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- On considère la fonction  $g : [0, 1 - \frac{1}{n}] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t + \frac{1}{n}) - f(t)$ . La fonction  $g$  est continue sur le segment  $[0, 1 - \frac{1}{n}]$  par composition et somme de fonctions continues. D'après le résultat de la question précédente, on a  $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$ . Par conséquent, soit tous les nombres  $g(0), g(\frac{1}{n}), g(\frac{2}{n}), \dots, g(\frac{n-1}{n})$  sont

égaux à 0 et alors ils sont tous solutions de l'équation  $f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t)$ , ou bien il existe deux de ces nombres qui sont non nuls et de signes opposés. Dans le deuxième cas, on note  $g(a)$  et  $g(b)$  ces deux nombres avec  $a < b$  puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir au moins une solution de l'équation  $f\left(t + \frac{1}{n}\right) = f(t)$  sur le segment  $[a, b] \subset \left[0, \frac{n-1}{n}\right] = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ .

3. On note  $d$  la fonction qui associe au temps  $t \in [0, 1]$  (en heures) la distance  $d(t)$  (en kilomètres) parcourue par l'écuyer. La fonction  $d$  est bien sûr continue et  $d(1) = 12$ . Si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade, alors cette vitesse aurait été de 12km/h et l'écuyer aurait parcouru  $12t$  kilomètres à l'instant  $t \in [0, 1]$ . On considère la fonction  $f : [0, 1] \in \mathbb{R}, t \mapsto d(t) - 12t$ . Alors  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  comme somme de fonctions continues et  $f(1) = d(1) - 12 = 0 = f(0)$ . D'après le résultat de la question précédente pour  $T = \frac{1}{12}$  (car  $1\text{h}/12=5\text{min}$ ), on sait qu'il existe un  $t \in \left[0, 1 - \frac{1}{12}\right]$  tel que  $f\left(t + \frac{1}{12}\right) = f(t)$ , c'est-à-dire tel que :  $d\left(t + \frac{1}{12}\right) - d(t) = 12\left(t + \frac{1}{12}\right) - 12t$ . Par conséquent, la distance  $d\left(t + \frac{1}{12}\right) - d(t)$  parcouru par l'écuyer dans l'intervalle  $\left[t, t + \frac{1}{12}\right]$  de 5min est la même que la distance  $12\left(t + \frac{1}{12}\right) - 12t$  parcouru par l'écuyer dans le même intervalle de temps si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade.

### Exercice 3

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction continue.

- On considère la fonction  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - x$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[a, b]$  comme somme de fonctions continues. Puisque  $(f(a), f(b)) \in [a, b]^2$  on a  $g(a) = f(a) - a \geq 0$  et  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ , donc  $g(a)g(b) \leq 0$ . Si  $g(a)g(b) = 0$  alors  $f(a) - a = 0$  ou  $f(b) - b = 0$ , donc  $c = a$  ou  $c = b$  est solution de l'équation  $f(c) = c$ . Sinon  $g(a)g(b) < 0$  donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $g(c) = 0$ , c'est-à-dire une solution de l'équation  $f(c) = c$ .
- On suppose que  $f$  est décroissante et qu'il existe deux nombres réels distincts  $(c_1, c_2) \in [a, b]^2$  tels que  $f(c_1) = c_1$  et  $c_2 = f(c_2)$ . On peut supposer que  $c_1 < c_2$  (sinon on inverse les notations de  $c_1$  et  $c_2$ ), alors  $c_1 < c_2 = f(c_2) \leq f(c_1) = c_1$  et donc  $c_1 < c_1$  ce qui est absurde. Donc il existe au plus un nombre réel  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = c$ .
- Si  $f$  est croissante, il n'y a pas nécessairement unicité de la solution de l'équation  $f(c) = c$ . Par exemple si  $f : [a, b] \rightarrow [a, b], x \mapsto x$  il y a une infinité de solutions (tous les nombres de  $[a, b]$ ).

### Exercice 4

Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$ . On suppose que :

$$\exists k > 0, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

- Soit  $a \in I$ . On a  $\forall x \in I, 0 \leq |f(x) - f(a)| \leq k|x - a|$ . Or  $\lim_{x \rightarrow a} k|x - a| = 0$ . Donc d'après le théorème d'encadrement  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)| = 0$  c'est-à-dire  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Par conséquent  $f$  est continue en  $a$  pour tout  $a \in I$ , c'est-à-dire  $f \in \mathcal{C}^0(I)$ .

- On suppose que  $k \in ]0, 1[$  et on suppose qu'il existe  $\ell \in I$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .

- On suppose qu'il existe deux nombres réels distincts  $(\ell_1, \ell_2) \in I^2$  tels que  $f(\ell_1) = \ell_1$  et  $f(\ell_2) = \ell_2$ . Alors  $|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq k|\ell_1 - \ell_2|$  et donc  $1 \leq k$  car  $|\ell_1 - \ell_2| > 0$ . Or ceci est absurde car  $k \in ]0, 1[$  donc il existe au plus un nombre réel  $\ell \in I$  tel que  $f(\ell) = \ell$ .
- On définit une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par  $u_0 \in I$  et la relation de récurrence  $\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$ . Montrons par récurrence que  $\forall n \geq 0, |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$ . Pour  $n = 0$  l'inégalité est vraie car  $k^0 = 1$ . On suppose que l'inégalité est vraie pour un rang  $n \geq 0$  fixé. On a :

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell| \leq k \times k^n |u_0 - \ell| = k^{n+1} |u_0 - \ell|.$$

Donc l'inégalité est héréditaire. On en déduit que  $\forall n \geq 0, 0 \leq |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$  d'après le principe de récurrence. Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n |u_0 - \ell| = 0$  car  $k \in ]0, 1[$ . Donc d'après le théorème d'encadrement  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .

### Exercice 5

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ . On fixe  $\varepsilon = 1 > 0$ . Alors il existe  $A \geq 0$  tel que pour tout  $x \geq A, |f(x) - \ell| \leq 1$ . En particulier pour tout  $x \in [A, +\infty[, \ell - 1 \leq f(x) \leq \ell + 1$ . De plus, d'après le théorème des bornes,  $f|_{[0, A]}$  est bornée, c'est-à-dire qu'il existe  $(m, M) \in \mathbb{R}^2$  tel que pour tout  $x \in [0, A], m \leq f(x) \leq M$ . En posant  $m' = \min\{\ell - 1, m\}$  et  $M' = \max\{\ell + 1, M\}$ , on a donc  $m' \leq f(x) \leq M'$  pour tout  $x \in [A, +\infty[ \cup ]0, A] = [0, +\infty[$ . On en déduit que  $f$  est bornée.
- On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . On fixe  $B = f(1)$ . Alors il existe  $A \geq 1$  tel que pour tout  $x \geq A, f(x) \geq f(1)$ . De plus, d'après le théorème des bornes,  $f|_{[0, A]}$  est minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe  $a \in [0, A]$  tel que pour tout  $x \in [0, A], f(x) \geq f(a)$ . En particulier  $f(1) \geq f(a)$  (car  $1 \in [0, A]$ ) et donc  $f(x) \geq f(a)$  pour tout  $x \in [A, +\infty[ \cup ]0, A] = [0, +\infty[$ . On en déduit que  $f$  est minorée et atteint sa borne inférieure.
- On suppose que  $f(0) < 0$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell > 0$ . On fixe  $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$ . Alors il existe  $A \geq 0$  tel que pour tout  $x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$ . En particulier  $f(A) \geq \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0$  et donc  $f(0)f(A) < 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f|_{[0, A]}$  s'annule au moins une fois, c'est-à-dire qu'il existe  $a \in [0, A]$  tel que  $f(a) = 0$ . On en déduit que  $f$  s'annule au moins une fois sur  $]0, +\infty[$  (puisque  $f(0) \neq 0$ ).
- $f_1 : x \rightarrow \cos(x)$  est une fonction continue et bornée sur  $[0, +\infty[$ , mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$  n'existe pas.  $f_2 : x \mapsto 0$  est une fonction continue, minorée qui atteint sa borne inférieure sur  $[0, +\infty[$ , mais  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 0 \neq +\infty$ . De même,  $f_3 : x \rightarrow 0$  est une fonction continue sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule au moins une fois sur  $]0, +\infty[$  mais  $f(0) \geq 0$  (et même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \leq 0$ ).

## Exercice 6

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - e^{\lambda x}$ . La fonction  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme et composée de fonctions usuelles. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - \lambda e^{\lambda x}.$$

1<sup>er</sup> cas :  $\lambda = 0$ . Alors l'équation  $x = e^{\lambda x} \Leftrightarrow x = 1$  admet une unique solution.

2<sup>e</sup> cas :  $\lambda > 0$ . Alors  $f'(x) > 0$  si et seulement si  $x < -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $] -\infty, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$  et strictement décroissante sur  $] -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$ . Or :

$$f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) = -\frac{(\ln(\lambda) + 1)}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

1<sup>er</sup> sous-cas :  $\lambda = e^{-1}$ . Alors  $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) = 0$  et donc l'équation  $x = e^{\lambda x}$  admet une unique solution  $x = -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} = e$ .

2<sup>e</sup> sous-cas :  $\lambda \in ]0, e^{-1}[$ . Alors  $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) > 0$  et donc l'équation  $x = e^{\lambda x}$  admet deux solutions d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

3<sup>e</sup> sous-cas :  $\lambda \in ]e^{-1}, +\infty[$ . Alors  $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) < 0$  et donc l'équation  $x = e^{\lambda x}$  n'admet pas de solutions.

3<sup>e</sup> cas :  $\lambda < 0$ . Alors  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . Or :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc l'équation  $x = e^{\lambda x}$  admet une unique solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

## Exercice 7

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe aucun  $y \in \mathbb{R}$  qui admet exactement un seul antécédent par  $f$ . Puisque chaque  $y \in \mathbb{R}$  admet au plus deux antécédents par  $f$  par hypothèse, chaque  $y \in \mathbb{R}$  a donc aucun antécédent (s'il n'est pas dans l'image directe de  $\mathbb{R}$  par  $f$ ) ou exactement deux antécédents par  $f$ .

Soit  $y = f(\mathbb{R})$ . On note  $a$  et  $b$  les deux antécédents de  $y$  par  $f$  avec  $a < b$ . Puisque  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , car continue sur  $\mathbb{R}$ ,  $f$  atteint un minimum et un maximum sur  $[a, b]$ . De plus,  $y = f(a) = f(b)$  ne peut être à la fois minimum et maximum de  $f$  sur  $[a, b]$  (sinon  $f$  serait constante sur  $[a, b]$  et donc  $y$  aurait une infinité d'antécédents). Donc il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) \neq y$  et  $f(c)$  est un minimum ou un maximum de  $f$  sur  $[a, b]$ .

1<sup>er</sup> cas :  $f(c)$  est un minimum de  $f$  sur  $[a, b]$ . On note  $c'$  le deuxième antécédent de  $f(c)$  par  $f$  (donc  $c' \neq a$  et  $c' \neq b$  car  $f(c') = f(c) \neq y = f(a) = f(b)$ ). Alors :

- $c' \in ]-\infty, a[$  est absurde car sinon on peut trouver  $y' \in ]f(c), y[$  qui admet au moins trois antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires ;
- $c' \in ]a, b[$  est absurde car sinon on peut trouver  $y' \in ]f(c), y[$  qui admet au moins quatre antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires ;

—  $c' \in ]b, +\infty[$  est absurde car sinon on peut trouver  $y' \in ]f(c), y[$  qui admet au moins trois antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2<sup>e</sup> cas :  $f(c)$  est un maximum de  $f$  sur  $[a, b]$ . On note  $c'$  le deuxième antécédent de  $f(c)$  par  $f$  (donc  $c' \neq a$  et  $c' \neq b$  car  $f(c') = f(c) \neq y = f(a) = f(b)$ ). En raisonnant comme dans le 1<sup>er</sup> cas à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on obtient une absurdité dans chacun des cas  $c' \in ]-\infty, a[$ ,  $c' \in ]a, b[$  et  $c' \in ]b, +\infty[$ .

Finalement, on obtient une absurdité dans tous les cas, donc il existe au moins un  $y_0 \in \mathbb{R}$  qui admet exactement un seul antécédent par  $f$ .