Feuille de TD n° 19

Probabilités sur un univers fini

Exercice 1

On pioche une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (jeu classique).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois cartes de trèfle ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement deux cartes de carreau et deux valets ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux dames ?

Exercice 2

Dans une classe de $n \geqslant 2$ élèves, calculer la probabilité que les dates d'anniversaires soient toutes différentes (on ne considèrera pas les cas particuliers dus aux 29 février). Donner une valeur approchée de cette probabilité dans le cas où $n = 42$.

Exercice 3

«Est-il plus avantageux de parier sur l'apparition d'au moins un as en lançant 4 fois un dé ou sur l'apparition d'au moins un double as en lançant 24 fois une paire de dés ?» (Chevalier de Méré, 1654)

Exercice 4

On considère une pièce de monnaie déséquilibrée dont la probabilité d'obtenir «face» après un lancer est $p \in]0,1[$ (et la probabilité d'obtenir «pile» est $1-p$). Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité $p_{n,k}$ d'obtenir exactement k fois «face» après n lancers. Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = 1$.

Exercice 5

Pour se qualifier à un tournoi de tir à l'arc, un archer doit effectuer trois tirs consécutifs sur une cible située à 20m et une cible située à 50m, en changeant de cible entre chaque tir, et atteindre au moins deux cibles consécutivement. On note $p \in]0,1[$ la probabilité d'atteindre la cible à 20m et $q \in]0,p[$ celle d'atteindre la cible à 50m. Sur quelle cible l'archer doit-il commencer à tirer ?

Exercice 6

Un étudiant de classe préparatoire estime qu'il a une chance sur quatre de réussir à un concours. A combien de concours devra-t-il s'inscrire et participer aux épreuves pour avoir au moins 95% de chances d'en réussir au moins un.

Exercice 7

On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) $n \geqslant 1$ fois de suite et on note p_n la probabilité que les quatre chiffres apparaissent au moins une fois lors des n lancers.

1. Calculer p_n pour $n \in \{1,2,3,4,5\}$.
2. Pour chaque $k \in \{1,2,3,4\}$, on note A_k l'événement : «la face numéro k n'apparait pas lors des n lancers». Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.
3. En déduire une expression de p_n pour tout $n \geqslant 1$.
4. Calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$ et interpréter le résultat.

Exercice 8

1. On suppose qu'une pièce de monnaie a une chance sur 1000 de tomber (et se stabiliser) sur la tranche après un lancer. Quelle est la probabilité p_{1000} que la pièce tombe réellement sur sa tranche au moins une fois après 1000 lancers ?
2. En remplaçant 1000 par un entier n quelconque dans l'énoncé précédent, calculer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 9

On lance un dé à six faces équilibré trois fois de suite et on note (a,b,c) les résultats obtenus. Quelle est la probabilité que le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ ait deux racines réelles distinctes ?

Exercice 10

On dispose de n paquets (où $n \in \mathbb{N}^\star$) qui sont tous vides sauf un qui contient une surprise. On les ouvre les uns après les autres en mettant à l'écart les paquets vides ouverts. Quelle est la probabilité de trouver la surprise au k-ième essai (où $k \in \{1,2,\dots,n\}$) ?

Exercice 11

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère n sacs numérotés de 1 à n tels que le sac n° k contient k boules bleues et $n-k$ boules rouges. On choisit un sac avec une probabilité égale à λk de choisir le sac n° k, puis on tire une boule de ce sac.

1. Déterminer la valeur de λ.
2. On tire une boule bleue. Exprimer en fonction de $k \in \{1,2,\dots,n\}$ la probabilité que cette boule provienne du sac n° k.

Exercice 12

Soit $p \in]0,1[$. On considère une chaîne de personnes. La première personne détient une information sous la forme «vrai» ou «faux» qu'elle transmet à la personne suivante, qui elle-même la transmet à la personne suivante, qui elle-même la transmet à la personne suivante, etc. Chaque personne transmet correctement l'information qu'elle a reçu avec une probabilité p et l'information contraire avec une probabilité $1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note p_n la probabilité que la n-ième personne ait bien reçu l'information de départ (et donc $p_1 = 1$).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer p_{n+1} en fonction de p_n.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. Etudier la nature de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 13

On sait que trois sociétés (désignées par A, B et C) se partagent le marché des dés truqués : 60% des dés truqués proviennent de la société A, 25% de la société B et 15% de la société C. Le tableau ci-dessous indique pour chaque société la probabilité d'apparition de chaque face de dé.

	1	2	3	4	5	6
A	10%	10%	10%	10%	10%	50%
B	10%	10%	15%	15%	20%	30%
C	5%	10%	15%	20%	25%	25%

Un joueur joue avec trois dés truqués provenant de la même société. Il obtient «421» au premier lancer. Quelle est la probabilité qu'il ait joué avec des dés de la société A ? de la société B ? de la société C ?