Corrigé de la feuille de TD n° 19

Probabilités sur un univers fini

Exercice 1

On pioche une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (jeu classique).

1. Soit A l'événement d'obtenir exactement trois cartes de trèfle.

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{8}{3} \times \binom{32-8}{2}}{\binom{32}{5}} \approx 7,68\%.$$

2. Soit B l'événement d'obtenir exactement deux cartes de carreau et deux valets.

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\binom{7}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{32-7-3-1}{1} + \binom{1}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{32-7-3-1}{2}}{\binom{32}{5}} \approx 2,85\%.$$

3. Soit C l'événement d'obtenir au moins deux dames.

$$P(C) = 1 - \frac{\text{card}\left(\overline{C}\right)}{\text{card}(\Omega)} = 1 - \frac{\binom{32-4}{5} + \binom{4}{1} \times \binom{32-4}{4}}{\binom{32}{5}} \approx 10,53\%.$$

Exercice 2

Dans une classe de $n \geqslant 2$ élèves, la probabilité que les dates d'anniversaires soient toutes différentes est donnée par :

$$\begin{cases} \dfrac{365 \times 364 \times 363 \times \cdots \times (365-n+1)}{365 \times 365 \times 365 \times \cdots \times 365} = \dfrac{365!}{365^n(365-n)!} & \text{si } n \leqslant 365 \\ 0 & \text{si } n > 365. \end{cases}$$

Dans le cas où $n = 46$, on obtient :

$$\frac{365!}{365^{46}(365-46)!} = \prod_{k=0}^{45} \frac{365-k}{365} = \prod_{k=0}^{45} \left(1 - \frac{k}{365}\right) \approx 5,17\%.$$

Exercice 3

La probabilité d'obtenir au moins un as en lançant 4 fois un dé est égale à $1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 51,8\%$, alors que la probabilité d'obtenir au moins un double as en lançant 24 fois une paire de dés est égale à $1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 49,1\%$. Il est donc plus avantageux de parier sur le premier choix.

Exercice 4

On a : $p_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (on choisit k lancers parmi n qui donnent «face» avec une probabilité de p^k et les $n-k$ lancers restants donnent «pile» avec une probabilité de $(1-p)^{n-k}$). Donc $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1$ d'après la formule du binôme de Newton, ce qui est cohérent puisque les événements «obtenir exactement k fois «face» après n lancers» pour $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ forment un système complet.

Exercice 5

On modélise par une 3-liste d'éléments de $\{0, 1\}$ les trois tirs consécutifs de l'archer : 1 s'il atteint la cible et 0 s'il ne l'atteint pas. Pour se qualifier, l'archer doit donc réaliser 111 ou 110 ou 011, ce qui revient à faire la somme des probabilités de trois événements incompatibles. De plus, on remarque que l'archer devra obligatoirement réussir son deuxième tir pour pouvoir se qualifier.

Si l'archer commence par tirer sur la cible à 20m, la probabilité de se qualifier est donnée par : $pqp + pq(1-p) + (1-p)qp = pq(p+1-p+1-p) = pq(2-p)$.

Si l'archer commence par tirer sur la cible à 50m, la probabilité de se qualifier est donnée par : $qpq + qp(1-q) + (1-q)pq = pq(q+1-q+1-q) = pq(2-q)$.

Puisque $q < p$, on a $2-p < 2-q$ et donc $pq(2-p) < pq(2-q)$ car $pq > 0$. Par conséquent, il est plus avantageux pour l'archer de commencer par tirer sur la cible à 50m, ce qui est cohérent puisqu'il réalisera alors son deuxième tir (qu'il doit obligatoirement réussir) sur la cible qu'il a le plus de chance d'atteindre.

Exercice 6

La probabilité que l'étudiant réussisse au moins un concours parmi $n \geqslant 1$ est donnée par $1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n$. Or on a :

$$1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^n \geqslant 0,95 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n \geqslant 0,05 \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \approx 10,4.$$

Donc l'étudiant devra s'inscrire et participer aux épreuves d'au moins 11 concours pour avoir au moins 95% de chances d'en réussir au moins un.

Exercice 7

On lance un dé à quatre faces (numérotées de 1 à 4) $n \geqslant 1$ fois de suite et on note p_n la probabilité que les quatre chiffres apparaissent au moins une fois lors des n lancers.

1. $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}$ et $p_5 = \frac{\binom{4}{1} \times \binom{5}{2} \times 3!}{4^5} = \frac{15}{64}$.
2. On a :

$$\begin{aligned} & P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ =& \ldots \\ =& P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_4) \\ & - P(A_2 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_4) - P(A_3 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ & + P(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + P(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + P(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ & - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ =& 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 6 \times \left(\frac{2}{4}\right)^n + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - 0 \end{aligned}$$

3. Donc $\forall n \geqslant 1,\ p_n = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{6}{2^n} - \frac{1}{4^{n-1}}$.
4. Donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1 - 0 + 0 - 0$ (car $-1 < \frac{3}{4} < 1$) ce qui est cohérent car plus le nombre de lancers de dé est grand, plus on est quasi-certain que les quatre chiffres apparaissent au moins une fois lors de tous les lancers.

Exercice 8

1. La probabilité que la pièce tombe sur sa tranche au moins une fois après 1000 lancers est donnée par :
$$p_{1000} = 1 - \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000}.$$
2. On a :
$$p_n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \sim 1 - \exp(-1) = \frac{e-1}{e}$$
car $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n}$.

Exercice 9

Le polynôme $P = aX^2 + bX + c$ a deux racines réelles distinctes si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $ac < \frac{b^2}{4}$. En listant tous les cas possibles on obtient :

- si $b = 1$ il n'existe pas a et c dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que $\Delta > 0$;
- si $b = 2$ il n'existe pas a et c dans $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que $\Delta > 0$;
- si $b = 3$ alors $\Delta > 0 \Leftrightarrow ac < \frac{9}{4} \Leftrightarrow ac \leqslant 2$, il y a donc 3 couples possibles pour (a, c) : $(1, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, 1)$;
- si $b = 4$ alors $\Delta > 0 \Leftrightarrow ac < \frac{16}{4} \Leftrightarrow ac \leqslant 3$, il y a donc 5 couples possibles pour (a, c) : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$ et $(3, 1)$;
- si $b = 5$ alors $\Delta > 0 \Leftrightarrow ac < \frac{25}{4} \Leftrightarrow ac \leqslant 6$, il y a donc 14 couples possibles pour (a, c) : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$ et $(6, 1)$;
- si $b = 6$ alors $\Delta > 0 \Leftrightarrow ac < \frac{36}{4} \Leftrightarrow ac \leqslant 8$, il y a donc 16 couples possibles pour (a, c) : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$ et $(6, 1)$.

D'où la probabilité que P ait deux racines réelles distinctes :
$$\frac{3 + 5 + 14 + 16}{6^3} \approx 17,6\%.$$

Exercice 10

Pour tout $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note C_ℓ l'événement correspondant au cas où la surprise est dans le ℓ-ième paquet. La probabilité de trouver la surprise au k-ième essai est donnée par (en utilisant la formule des probabilités composées) :
$$\begin{aligned}
&P\left(\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_{k-1}} \cap C_k\right) \\
=&P\left(\overline{C_1}\right) \times P_{\overline{C_1}}\left(\overline{C_2}\right) \times P_{\overline{C_1} \cap \overline{C_2}}\left(\overline{C_3}\right) \times \dots \\
&\dots \times P_{\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_{k-2}}}\left(\overline{C_{k-1}}\right) \times P_{\overline{C_1} \cap \overline{C_2} \cap \dots \cap \overline{C_{k-1}}}\left(C_k\right) \\
=&\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \dots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} \\
=&\frac{\prod_{\ell=1}^{k-1}(n-\ell)}{\prod_{\ell=0}^{k-1}(n-\ell)} = \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

En particulier, il y a autant de chances de trouver la surprise au premier essai qu'au dernier (ce qui est logique avec un peu de recul même si ça peut surprendre).

Exercice 11

1. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note S_k l'événement «choisir le sac n° k». Puisque $(S_k)_{k\in\{1,2,\dots,n\}}$ forment un système complet d'événements, on a $1 = \sum_{k=1}^n \lambda k = \lambda \frac{n(n+1)}{2}$ et donc $\lambda = \frac{2}{n(n+1)}$.
2. On note B l'événement de tirer une boule bleue. On calcule la probabilité qu'une boule provienne du sac n° k sachant qu'elle est bleue à l'aide de la formule de Bayes :
$$\begin{aligned}
P_B(S_k) &= \frac{P(S_k)P_{S_k}(B)}{P(B)} = \frac{\lambda k \times \frac{k}{k+n-k}}{\sum_{\ell=1}^n P(S_\ell)P_{S_\ell}(B)} = \frac{\lambda \frac{k^2}{n}}{\sum_{\ell=1}^n \lambda \frac{\ell^2}{n}} = \frac{k^2}{\sum_{\ell=1}^n \ell^2} \\
&= \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}.
\end{aligned}$$

Exercice 12

1. On note I_n l'événement correspondant au cas où la n-ième personne ait bien reçu l'information de départ et C_n l'événement correspondant au cas où la n-ième personne transmet correctement l'information à la personne suivante. Puisque C_n et $\overline{C_n}$ forment un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :
$$\begin{aligned}
p_{n+1} &= P\left(I_{n+1}\right) = P\left(C_n\right) P_{C_n}\left(I_{n+1}\right) + P\left(\overline{C_n}\right) P_{\overline{C_n}}\left(I_{n+1}\right) \\
&= pP\left(I_n\right) + (1-p)P\left(\overline{I_n}\right) = pp_n + (1-p)(1-p_n) = (1-p) + (2p-1)p_n.
\end{aligned}$$
2. Puisque $2p - 1 \neq 1$ (car $p \in]0, 1[$ donc $2p - 1 \in]-1, 1[$), la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique. On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(p_n - \alpha)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $2p - 1$. On a :
$$\forall n \geqslant 1,\ (2p-1)(p_n - \alpha) = p_{n+1} - \alpha = (1-p) + (2p-1)p_n - \alpha$$

donc :

$$-(2p-1)\alpha = (1-p) - \alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-p}{1-(2p-1)} = \frac{1-p}{2-2p} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\left(p_n - \frac{1}{2}\right)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique de raison $2p-1$ et par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1,\ p_n - \frac{1}{2} = (2p-1)^{n-1}\left(p_1 - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow p_n = \frac{(2p-1)^{n-1}+1}{2}$$

3. Puisque $2p-1 \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}(2p-1)^{n-1} = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}$. Ainsi $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et converge vers $\frac{1}{2}$.

Exercice 13

On note E_{421} l'événement d'obtenir «421» en un lancer de trois dés et E_k l'événement d'obtenir k en un lancer de un dé pour $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Puisqu'il y a $3! = 6$ façons de permuter les résultats de trois dés, on a $P(E_{421}) = 6P(E_4)P(E_2)P(E_1)$. On en déduit :

$$\left\{\begin{array}{lclcl} P_A(E_{421}) & = & 6\times 10\% \times 10\% \times 10\% & = & 0,6\% \\ P_B(E_{421}) & = & 6\times 15\% \times 10\% \times 10\% & = & 0,9\% \\ P_C(E_{421}) & = & 6\times 20\% \times 10\% \times 5\% & = & 0,6\% \end{array}\right.$$

puis d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} P(E_{421}) & = & P(A)P_A(E_{421}) + P(B)P_B(E_{421}) + P(C)P_C(E_{421}) \\ & = & 60\% \times 0,6\% + 25\% \times 0,9\% + 15\% \times 0,6\% \\ & = & 0,675\% \end{array}$$

d'où d'après la formule de Bayes :

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} P_{E_{421}}(A) & = & \frac{P(A)P_A(E_{421})}{P(E_{421})} & = & \frac{60\%\times 0,6\%}{0,675\%} & \approx & 53,33\% \\ P_{E_{421}}(B) & = & \frac{P(B)P_B(E_{421})}{P(E_{421})} & = & \frac{25\%\times 0,9\%}{0,675\%} & \approx & 33,33\% \\ P_{E_{421}}(C) & = & \frac{P(C)P_C(E_{421})}{P(E_{421})} & = & \frac{15\%\times 0,6\%}{0,675\%} & \approx & 13,33\% \end{array}\right. .$$