Corrigé de la feuille de TD n$^{\text{o}}$ 1

Le langage mathématique

Exercice 1

Un élevage de lapin est touché par la myxomatose. On considère les assertions suivantes :

P : «Tous les mâles de l'élevage sont infectés.»
Q : «Dans l'élevage, il existe un mâle sain et une femelle saine.»

1. Les négations sont :

   non(P) : «Dans l'élevage, il existe un mâle sain.»
   non(Q) : «Tous les mâles de l'élevage sont infectés ou toutes les femelles de l'élevage sont infectés.»

2. La réécriture de P sous forme d'implication donne :

   P : «Si un lapin de l'élevage est un mâle alors il est infecté.»
   contraposée : «Si un lapin de l'élevage est sain alors c'est une femelle.»
   réciproque : «Si un lapin de l'élevage est infecté alors c'est un mâle.»

3. — «Pour prouver que P est vraie, il suffit de vérifier que tous les lapins sains sont des femelles.» : vraie.
   — «Pour prouver que P est vraie, il est nécessaire de vérifier que toutes les femelles sont saines.» : fausse.
   — «Pour prouver que P est fausse, il suffit de trouver un mâle sain.» : vraie.
   — «Pour prouver que P est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont sains.» : fausse.
   — «Pour prouver que Q est vraie, il suffit de trouver une femelle saine.» : fausse.
   — «Pour prouver que Q est vraie, il est nécessaire de trouver une femelle saine.» : vraie.
   — «Pour prouver que Q est fausse, il suffit de vérifier que toutes les femelles sont infectées.» : vraie.
   — «Pour prouver que Q est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les lapins sont infectés.». : fausse.

Exercice 2

La disjonction exclusive de deux assertions P et Q est définie comme l'assertion, notée «P ou bien Q», qui est vraie lorsque l'une des deux assertions P ou Q est vraie alors que l'autre est fausse, et fausse lorsque P et Q sont vraies ou fausses en même temps.

1. La table de vérité de la disjonction exclusive est :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P ou bien Q	F	V	V	F

2. La disjonction exclusive est symétrique car «P ou bien Q» et «Q ou bien P» ont la même table de vérité. Pour l'associativité, on considère trois assertions P, Q et R et on dresse les tables de vérité suivantes :

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
P ou bien Q	F	F	V	V	V	V	F	F
(P ou bien Q) ou bien R	V	F	F	V	F	V	V	F
Q ou bien R	F	V	V	F	F	V	V	F
P ou bien (Q ou bien R)	V	F	F	V	F	V	V	F

   Puisque «(P ou bien Q) ou bien R» et «P ou bien (Q ou bien R)» ont la même table de vérité, on en déduit que la disjonction exclusive est associative.

3. L'assertion «P ou bien Q» est fausse lorsque P et Q sont vraies ou fausses en même temps. Donc :

$$\text{non(P ou bien Q)} \iff \Big((P \text{ et } Q) \text{ ou } (\text{non}(P) \text{ et non}(Q))\Big).$$

4. On a :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P ou bien Q	F	V	V	F
P ou Q	V	V	V	F
P et Q	V	F	F	F
(P ou Q) ou bien (P et Q)	F	V	V	F

   On en déduit que «P ou bien Q» et «(P ou Q) ou bien (P et Q)» sont équivalentes car elles ont la même table de vérité :

$$(P \text{ ou bien } Q) \iff \Big((P \text{ ou } Q) \text{ ou bien } (P \text{ et } Q)\Big).$$

   De même :

P	V	V	F	F
Q	V	F	V	F
P ou bien Q	F	V	V	F
(P ou bien Q) ou bien Q	V	V	F	F

   Donc :

$$\Big((P \text{ ou bien } Q) \text{ ou bien } Q\Big) \iff P.$$

Exercice 3

On considère l'histoire suivante :

Un crocodile s'empare d'un bébé et dit à la mère :
«Si tu devines ce que je vais faire, je te rends ton bébé, sinon je le dévore !».

Que la mère réponde : «Tu vas me rendre mon bébé.» ou bien «Tu vas dévorer mon bébé.», on aboutit dans chaque cas à une contradiction (c'est-à-dire un énoncé qui est à la fois vrai et faux en même temps, ou bien qui n'est ni vrai ni faux). Puisque le principe du tiers exclu n'est pas vérifié, on en déduit qu'il s'agit d'un paradoxe et non d'une assertion mathématique.

Exercice 4

On a :

P	V	V	V	V	F	F	F	F
Q	V	V	F	F	V	V	F	F
R	V	F	V	F	V	F	V	F
$P \Longrightarrow Q$	V	V	F	F	V	V	V	V
$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R$	V	F	V	V	V	F	V	F
$Q \Longrightarrow R$	V	F	V	V	V	F	V	V
$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$	V	F	V	V	V	V	V	V

Puisque «$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R$» et «$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)$» n'ont pas la même table de vérité, on en déduit que l'implication logique n'est pas associative.

Exercice 5

On a :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$$
$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 2 \leqslant 100\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 30, 31, 32\}$$
$$C = \{n^2 + 1,\ n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 5, 10, 17, 26, 37, \ldots\}$$

On en déduit donc :

$$A \cap B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32\}$$
$$E = (A \cap B) \setminus C = \{0, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 28, 30, 32\}$$
$$A \cup C = \{0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, \ldots\}$$
$$F = B \setminus (A \cup C) = \{3, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}.$$

Exercice 6

La différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E est définie comme l'ensemble, noté $A \Delta B$, des éléments de E qui appartiennent à A ou B mais pas aux deux à la fois.

1. Soient A, B et C trois parties de E. Montrer que l'intersection est distributive sur la différence symétrique revient à prouver que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. On procède par double inclusion.
   1^re^ inclusion : soit $x \in A \cap (B \Delta C)$ alors $x \in A$ et $x \in B \Delta C$. En particulier, $x \in B$ ou $x \in C$ mais $x \notin B \cap C$.
   <u>1^er^ cas</u> : $x \in B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$ donc $x \in A \cap B$.
   <u>2^e^ cas</u> : $x \in C$. Alors $x \in A$ et $x \in C$ donc $x \in A \cap C$.
   <u>Conclusion</u> : ainsi on a dans les deux cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Or $x \notin B \cap C$ donc $x \notin (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$. Finalement $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$. On en déduit l'inclusion :
   $$A \cap (B \Delta C) \subset (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$
   2^e^ inclusion : soit $x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ alors $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$ mais $x \notin (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C$.
   <u>1^er^ cas</u> : $x \in A \cap B$. Alors $x \in A$ et $x \in B$.
   <u>2^e^ cas</u> : $x \in A \cap C$. Alors $x \in A$ et $x \in C$.
   <u>Conclusion</u> : ainsi on a dans les deux cas $x \in A$ et $x \in B \cup C$. Or $x \notin A \cap B \cap C$ donc $x \notin B \cap C$. Finalement $x \in A$ et $x \in B \Delta C$ donc $x \in A \cap (B \Delta C)$. On en déduit l'inclusion :
   $$(A \cap B) \Delta (A \cap C) \subset A \cap (B \Delta C).$$
   Conclusion : on en déduit par double inclusion :
   $$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C).$$
   On peut également retrouver ce résultat à l'aide de la table de vérité suivante où $x \in E$:

$x \in A$	V	V	V	V	F	F	F	F
$x \in B$	V	V	F	F	V	V	F	F
$x \in C$	V	F	V	F	V	F	V	F
$x \in B \Delta C$	F	V	V	F	F	V	V	F
$x \in A \cap (B \Delta C)$	F	V	V	F	F	F	F	F
$x \in A \cap B$	V	V	F	F	F	F	F	F
$x \in A \cap C$	V	F	V	F	F	F	F	F
$x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$	F	V	V	F	F	F	F	F

   Puisque «$x \in A \cap (B \Delta C)$» et «$x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$» ont la même table de vérité, on a :
   $$\forall x \in E,\ x \in A \cap (B \Delta C) \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$
   ce qui prouve que $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

2. Soient A, B et C trois parties de E. On raisonne par double implication.
1re implication : on suppose que $A\Delta B = A\Delta C$. Pour montrer que $B = C$, on procède par double inclusion.
<u>1re inclusion</u> : soit $x \in B$. Pour utiliser l'hypothèse $A\Delta B = A\Delta C$, on raisonne par disjonction de cas.
1er cas : $x \in A$. Alors $x \notin A\Delta B$ (car $x \in A\cap B$) donc $x \notin A\Delta C$ (car $A\Delta B = A\Delta C$) donc $x \in C$ (car $x \in A$).
2e cas : $x \notin A$. Alors $x \in A\Delta B$ (car $x \notin A$ et $x \in B$) donc $x \in A\Delta C$ (car $A\Delta B = A\Delta C$) donc $x \in C$ (car $x \notin A$).
Conclusion : dans les deux cas on a $x \in C$. Ainsi $B \subset C$.
<u>2e inclusion</u> : on raisonne exactement comme pour la 1re inclusion en remplaçant B par C et C par B. On obtient ainsi $C \subset B$.
<u>Conclusion</u> : Finalement $B = C$ par double inclusion. On a donc prouvé :
$$A\Delta B = A\Delta C \Longrightarrow B = C.$$
2e implication : on suppose que $B = C$. Alors $A\Delta B = A\Delta C$ (en remplaçant simplement l'ensemble B par l'ensemble C puisque ce sont les mêmes !!). Ainsi, on a :
$$B = C \Longrightarrow A\Delta B = A\Delta C.$$
Conclusion : Finalement on a par double implication :
$$A\Delta B = A\Delta C \Longleftrightarrow B = C.$$

Exercice 7

On pose :
$$\begin{aligned} A &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 1\big\} \\ \text{et} \quad B &= \{(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$
On va procéder par double inclusion pour montrer que $A = B$.
1re inclusion : soit $(x, y, z) \in A$, donc $x - 2y + 3z = 1$. Pour montrer que $(x, y, z) \in B$, il suffit de trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(x, y, z) = (5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b)$. On cherche donc à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues a et b :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5b - a &=& x \\ 1 + a + b &=& y \\ 1 + a - b &=& z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcll} -a + 5b &=& x & (L_1) \\ a + b &=& y - 1 & (L_2) \\ a - b &=& z - 1 & (L_3) \end{array}\right. .$$
En particulier, $(L_2 + L_3)/2$ donne $a = (y + z - 2)/2$ et $(L_2 - L_3)/2$ donne $b = (y - z)/2$. En fixant ces valeurs pour a et b, on a bien :
$$\begin{aligned} 5b - a &= \frac{1}{2}(5y - 5z - y - z + 2) = 2y - 3z + 1 = x \quad (\text{car } x - 2y + 3z = 1) \\ 1 + a + b &= 1 + \frac{1}{2}(y + z - 2 + y - z) = 1 + y - 1 = y \\ 1 + a - b &= 1 + \frac{1}{2}(y + z - 2 - y + z) = 1 + z - 1 = z. \end{aligned}$$
Ainsi $(x, y, z) = (5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b)$ pour $a = (y + z - 2)/2$ et $b = (y - z)/2$. On en déduit que $(x, y, z) \in B$ pour tout $(x, y, z) \in A$ donc que $A \subset B$.
2e inclusion : soit $(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \in B$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$$(5b - a) - 2(1 + a + b) + 3(1 + a - b) = (5 - 2 - 3)b + (-1 - 2 + 3)a + (-2 + 3) = 1$$
donc $(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \in A$. Puisque ceci est vrai pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donc pour tout $(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \in B$, on en déduit que $A \subset B$.
Conclusion : finalement, on a montré par double inclusion que :
$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 1\big\} = \{(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 8

Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit l'ensemble suivant :
$$\mathcal{E}_g = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ dérivable et } f' + f = g\}.$$
Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{E}_g$. Pour montrer que $\mathcal{E}_g = \{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}$, on raisonne par double inclusion.
1re inclusion : soit F une fonction de $\mathcal{E}_g$. Pour montrer que $F \in \{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}$, il suffit de trouver une fonction $f \in \mathcal{E}_0$ telle que $F = f + h$. On pose donc $f = F - h$ et il suffit de prouver que $f \in \mathcal{E}_0$. La fonction f est dérivable comme différence de fonctions dérivables (car F et h sont des fonctions de $\mathcal{E}_g$). De plus, on a :
$$f' + f = (F - h)' + (F - h) = F' - h' + F - h = (F' + F) - (h' + h) = g - g = 0.$$
Donc f est bien une fonction de $\mathcal{E}_0$ et par conséquent $F = f + h$ est bien une fonction de $\{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}$. On en déduit donc que $\mathcal{E}_g \subset \{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}$.
2e inclusion : soit F une fonction de $\{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}$, c'est-à-dire $F = f + h$ où $f \in \mathcal{E}_0$. Alors F est dérivable comme somme de fonctions dérivables et :
$$F' + F = (f + h)' + (f + h) = f' + h + f + h = (f' + f) + (h' + h) = 0 + g = g.$$
Donc F est bien une fonction de $\mathcal{E}_g$ et par conséquent $\{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\} \subset \mathcal{E}_g$.
Conclusion : finalement, on a par double inclusion :
$$\mathcal{E}_g = \{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}.$$

Exercice 9

On a :

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$
$$\mathcal{P}(\{0,1\}) = \Big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\Big\}$$
$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\})) = \Big\{\emptyset, \big\{\emptyset\big\}, \big\{\{0\}\big\}, \big\{\{1\}\big\}, \big\{\{0,1\}\big\}, \big\{\emptyset,\{0\}\big\}, \big\{\emptyset,\{1\}\big\}, \big\{\emptyset,\{0,1\}\big\},$$
$$\big\{\{0\},\{1\}\big\}, \big\{\{0\},\{0,1\}\big\}, \big\{\{1\},\{0,1\}\big\}, \big\{\emptyset,\{0\},\{1\}\big\}, \big\{\emptyset,\{0\},\{0,1\}\big\},$$
$$\big\{\emptyset,\{1\},\{0,1\}\big\}, \big\{\{0\},\{1\},\{0,1\}\big\}, \big\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\big\}\Big\}.$$

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On a :

1. $\text{non}\Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0\Big)$
2. $\text{non}\Big(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0\Big)$
3. $\text{non}\Big(\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq y\Big)$
4. $\text{non}\Big(\exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall M \in \mathbb{R}_+,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |f(x)| > M\Big)$
5. $\text{non}\Big(\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon\Big)$
   $\Longleftrightarrow \Big(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a \text{ et } |f(x)| > \varepsilon\Big)$
6. $\text{non}\Big(\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\Big)$
   $\Longleftrightarrow \Big(\exists a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall \eta \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon\Big)$

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On a :

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais : «$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$».
2. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas la suite constante égale à 0 : «$\exists n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 0$».
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante : «$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$» ou «$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 \leqslant n_2 \Longrightarrow u_{n_1} \leqslant u_{n_2}$».
4. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend jamais deux fois la même valeur : «$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ n_1 \neq n_2 \Longrightarrow u_{n_1} \neq u_{n_2}$».
5. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée : «$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M$» .
6. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas minorée : «$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant m$».
7. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante : «$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n$» ou «$\forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n_1} = u_{n_2}$» ou «$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = C$».
8. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire : «$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_{n+1} = u_n$» ou «$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall (n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2,\ (n_1 \geqslant n_0 \text{ et } n_2 \geqslant n_0) \Longrightarrow u_{n_1} = u_{n_2}$» ou «$\exists C \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n = C$».

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

— P_1 : «$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» est vraie si et seulement si f est majorée.
— P_2 : «$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» est toujours vraie (tautologie).
— P_3 : «$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» est vraie si et seulement si f n'est pas minorée.
— P_4 : «$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» est toujours fausse.

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels.

Implication directe : on suppose que $(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant M)$ est vraie. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par M. En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement majorée par $M' = M + 1$. Autrement dit, l'assertion $(\exists M' > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M')$ est vraie. Et puisque la variable M' est une variable muette, on en déduit que l'assertion $(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M)$ est vraie (c'est la même que la précédente !!). Ainsi :

$$(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant M) \Longrightarrow (\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M).$$

Implication réciproque : on suppose que $(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M)$ est vraie. Il existe donc un réel $M > 0$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement majorée par M. En particulier, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par M (puisque $\forall x \in \mathbb{R}, x < M \Longrightarrow x \leqslant M$ est une tautologie !!). Autrement dit, l'assertion $(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M)$ est vraie. Ainsi :

$$(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M) \Longrightarrow (\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant M).$$

Conclusion : par conséquent, l'équivalence est vraie par double implication :

$$(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant M) \Longleftrightarrow (\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M).$$

Exercice 14

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite continue si elle vérifie l'assertion suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

1. On considère la fonction $f : x \mapsto 42x + \pi$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$|f(x) - f(a)| = |42x + \pi - 42a - \pi| = 42|x - a|.$$
   Ainsi, en posant $\eta = \varepsilon/42$ on a bien $\eta > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$\text{si} \quad |x-a| < \eta \quad \text{alors} \quad |f(x) - f(a)| = 42|x-a| < 42\eta = 42\frac{\varepsilon}{42} = \varepsilon.$$

Finalement on a bien vérifié la définition de la continuité, donc $x \mapsto 42x + \pi$ est continue.

2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. On fixe $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| \\ &= |x-a||x+a| \\ &= |x-a||x-a+2a| \\ &\leqslant |x-a|\left(|x-a| + 2|a|\right)\end{aligned}$$

Si on suppose de plus que $|x - a| < \eta$ on obtient :

$$|f(x) - f(a)| < \eta(\eta + 2|a|).$$

Ainsi, il suffit de choisir $\eta > 0$ tel que $\eta(\eta + 2|a|) = \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$\eta^2 + 2|a|\eta - \varepsilon = 0.$$

On obtient une équation du second degré d'inconnue $\eta > 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 4a^2 + 4\varepsilon > 0$ donc cette équation a deux solutions :

$$\eta = \frac{-2|a| + \sqrt{4a^2 + 4\varepsilon}}{2} = -|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon} \quad \text{ou} \quad \eta = -|a| - \sqrt{a^2+\varepsilon}.$$

La deuxième solution ne convient pas puisqu'elle est strictement négative. On pose donc $\eta = -|a| + \sqrt{a^2 + \varepsilon}$. On remarque que $\eta > -|a| + \sqrt{a^2 + 0} = -|a| + |a| = 0$ en utilisant la stricte croissance de la fonction racine carrée. De plus, on a bien pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{si} \quad |x-a| < \eta \quad \text{alors} \quad |f(x) - f(a)| \leqslant |x-a|\left(|x-a| + 2|a|\right) < \eta(\eta + 2|a|) = \varepsilon.$$

Finalement on a bien vérifié la définition de la continuité, donc $x \mapsto x^2$ est continue.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto (0 \text{ si } x < 0 \text{ et } 1 \text{ si } x \geqslant 0)$. On cherche à contredire la définition de la continuité, c'est-à-dire à prouver que :

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon.$$

Or on a pour tout $(a, x) \in \mathbb{R}^2$:

$$|f(x) - f(a)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a < 0 \text{ et } x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad a < 0 \text{ et } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad a \geqslant 0 \text{ et } x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad a \geqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

En particulier, on a en posant $a = 0$ et $\varepsilon = 1$:

$$|f(x) - f(a)| = \varepsilon \quad \text{pour tout } x < 0.$$

Soit $\eta > 0$ quelconque. On pose $x = -\eta/2$. Alors :

$$|x - a| = \frac{\eta}{2} < \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| = \varepsilon \quad (\text{car } x < 0).$$

Ainsi, on a montré que pour tout $\eta > 0$ il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| < \eta$ et $|f(x) - f(a)| \geqslant \varepsilon$. Finalement on a bien contredit la définition de la continuité, donc la fonction $x \mapsto (0 \text{ si } x < 0 \text{ et } 1 \text{ si } x \geqslant 0)$ n'est pas continue.

Exercice 15

On remarque que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a :

$$\begin{aligned}(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1} &= (3+\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5}) \times (3-\sqrt{5})^n \\ &= 3\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right] + \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right].\end{aligned}$$

En particulier, pour prouver que $(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1}$ est un entier pair, il suffit de prouver que $3\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right]$ et $\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right]$ sont également des entiers pairs. On considère donc l'assertion suivante :

$$P(n) : \text{«}(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n \text{ et } \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right] \text{ sont des entiers pairs».}$$

Initialisation : pour $n = 0$, on a :

$$(3+\sqrt{5})^0 + (3-\sqrt{5})^0 = 1 + 1 = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^0 - (3-\sqrt{5})^0\right] = \sqrt{5}\,[1-1] = 0$$

donc $P(0)$ est vraie.
Hérédité : on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. Alors on a déjà vu que :

$$(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1} = 3\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right] + \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right].$$

Or $3\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right]$ est un entier pair (car $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair d'après $P(n)$) et $\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right]$ est un entier pair d'après $P(n)$. Donc $(3+\sqrt{5})^{n+1} + (3-\sqrt{5})^{n+1}$ est aussi un entier pair. De même, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^{n+1} - (3-\sqrt{5})^{n+1}\right] &= \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5}) \times (3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5}) \times (3-\sqrt{5})^n\right] \\ &= \sqrt{5}\Big[3\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right] \\ &\qquad\qquad + \sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right]\Big] \\ &= 3\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n\right] \\ &\qquad\qquad + 5\left[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n\right].\end{aligned}$$

Or $3\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n\right]$ est un entier pair (car $\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\right]$ est un entier pair d'après $P(n)$) et $5\left[(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n\right]$ est un entier pair (car $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair d'après $P(n)$). Donc $\sqrt{5}\left[(3+\sqrt{5})^{n+1}-(3-\sqrt{5})^{n+1}\right]$ est aussi un entier pair. Finalement $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : on en déduit d'après le principe de récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$, en particulier que $(3+\sqrt{5})^n+(3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair.

Exercice 16

On raisonne par récurrence double pour démontrer pour tout $n \geqslant 0$ la proposition suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \text{«}u_n = 2^n\cos(n\pi/3)\text{»}.$$

Initialisation. $2^0\cos(0) = 1 = u_0$ et $2^1\cos(\pi/3) = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vérifiées.
Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2u_{n+1} - 4u_n = 2\times 2^{n+1}\cos((n+1)\pi/3) - 4\times 2^n\cos(n\pi/3)\\
&= 2^{n+2}\cos(n\pi/3+\pi/3) - 2^{n+2}\cos(n\pi/3)\\
&= 2^{n+2}\cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - 2^{n+2}\sin(n\pi/3)\sin(\pi/3) - 2^{n+2}\cos(n\pi/3)\\
&= 2^{n+1}\cos(n\pi/3) - 2^{n+1}\sqrt{3}\sin(n\pi/3) - 2^{n+2}\cos(n\pi/3)\\
&= -2^{n+1}\cos(n\pi/3) - 2^{n+1}\sqrt{3}\sin(n\pi/3).
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3) &= 2^{n+2}\cos(n\pi/3+2\pi/3)\\
&= 2^{n+2}\cos(n\pi/3)\cos(2\pi/3) - 2^{n+2}\sin(n\pi/3)\sin(2\pi/3)\\
&= -2^{n+1}\cos(n\pi/3) - 2^{n+1}\sin(n\pi/3).
\end{aligned}$$

Donc $u_{n+2} = 2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3)$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+2)$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vérifiées alors $\mathcal{P}(n+2)$ aussi.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 17

Analyse. Le triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ doit vérifier :

$$\begin{cases} 0 = u_0 = a + 2^0b + 3^0c = a+b+c \\ 1 = u_1 = a + 2^1b + 3^1c = a+2b+3c \\ 7 = u_2 = a + 2^2b + 3^2c = a+4b+9c \end{cases} \iff \begin{cases} a = -b-c \\ b+2c = 1 \\ 3b+8c = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = -b-c \\ b = 1-2c \\ 3+2c = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 2 \\ b = -3 \\ a = 1 \end{cases}.$$

Synthèse. Montrons par récurrence la proposition suivante pour tout entier $n \geqslant 0$:

$$\mathcal{P}(n) : \text{«}u_n = 1 - 3\times 2^n + 2\times 3^n\text{»}.$$

On raisonne par récurrence triple.
Initialisation. $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies d'après les calculs effectués dans l'analyse pour trouver le triplet $(a,b,c) = (1,-3,2)$.
Hérédité. On suppose que $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ sont vraies pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
&u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n\\
=&6(1-3\times 2^{n+2}+2\times 3^{n+2}) - 11(1-3\times 2^{n+1}+2\times 3^{n+1}) + 6(1-3\times 2^n+2\times 3^n)\\
=&6(1-12\times 2^n+18\times 3^n) - 11(1-6\times 2^n+6\times 3^n) + 6(1-3\times 2^n+2\times 3^n)\\
=&(6-11+6) - (6\times 12 - 11\times 6 + 6\times 3)2^n + (6\times 18 - 11\times 6 + 6\times 2)3^n\\
=&1 - 24\times 2^n + 54\times 3^n = 1 - 3\times 2^{n+3} + 2\times 3^{n+3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 0$, si $\mathcal{P}(n)$, $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(n+2)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(n+3)$ aussi.
Conclusion. On conclut d'après le principe de récurrence triple que $u_n = 1-3\times 2^n+2\times 3^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.