# Feuille de TD n° 2

# Nombres

## Exercice 1

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

($E_1$) $3 - x = \frac{4}{x+1}$

($E_2$) $|2x - 4| = x + 1$

($E_3$) $\ln(x - 2) + \ln(x + 2) = \ln(3x)$

($E_4$) $m^2x^2 + 2mx = 3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

($E_5$) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$

## Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

($I_1$) $|2x + 3| \geqslant x + 3$

($I_2$) $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$

($I_3$) $x < \frac{1}{x}$

($I_4$) $2e^{2x} - 7e^x - 15 > 0$

($I_5$) $\frac{x}{x-2} < \frac{6}{x-1}$

## Exercice 3

ATTENTION : la calculatrice est interdite pour cet exercice !

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on définit l'approximation décimale de $x$ par défaut à $10^{-n}$ près par : $A_n(x) = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$.

1. Vérifier que $A_n(x) \leqslant x$.
2. Donner un majorant $\Delta$ de l'écart entre $x$ et $A_n(x)$.
3. Peut-on avoir $A_n(x) = x$ ? Et $x - A_n(x) = \Delta$ ?
4. Sachant que $A_3(\sqrt{2}) = 1,414$, déterminer $A_2(\sqrt{2})$ et $A_2(-\sqrt{2})$.
5. Sachant que $A_3(e) = 2,718$, déterminer $A_2(e + \sqrt{2})$ et $A_2(e - \sqrt{2})$.
6. Déterminer $A_2(e\sqrt{2})$ et $A_2\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)$.

## Exercice 4

Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 2b$. Simplifier l'expression suivante :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}.$$

## Exercice 5

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$$A = [0,1]\cup]2,+\infty[ \qquad B = ]-1,0[\cup\{1\}$$

$$C = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\} \qquad D = \{0,-1,2,-3,4,-5,6,-7,\ldots\}$$

$$E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} \qquad F = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor 1 - x\rfloor = 2\}$$

## Exercice 6

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

($E_1$) $\lfloor\sqrt{x^2+1}\rfloor = 2$

($E_2$) $|x - 1| = |2x - 5|$

($E_3$) $x + \sqrt{2x+1} = 1$

($E_4$) $\ln\left((x + 2)(x - 2)\right) = \ln(2x + 11)$

($E_5$) $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 11)$

($E_6$) $2e^{-x} - 6e^x = 1$

($E_7$) $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

($E_8$) $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$

($E_9$) $x^{x^3} = x^{3x}$

## Exercice 7

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

($I_1$) $x + \frac{1}{x} \geqslant 0$

($I_2$) $|3x - 1| > |x + 2|$

($I_3$) $(\ln(x))^2 > 1$

($I_4$) $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x - 1$

($I_5$) $e^{-2x} - e^{-x} > 0$

($I_6$) $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1$

($I_7$) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2 - 1)$

($I_8$) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1$

($I_9$) $\frac{5}{x+9} - \frac{2}{2x+3} > \frac{7}{9(x+1)}$

## Exercice 8

Déterminer chacun des sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :

$$\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z - 6 + 5i|\} \qquad \mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z(2\overline{z} + 1) = 1\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z + 4i}{5z - 3} \in \mathbb{R}\right\} \qquad \mathcal{S}_4 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) = 0\right\}$$

## Exercice 9

Montrer que $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2, \quad |z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$

## Exercice 10

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ :

$(E_1)$ $z^2 + 29 = 10z$

$(E_2)$ $z + \dfrac{1}{z} = 1$

$(E_3)$ $z^3 - 3z^2 + 5z = 3$

$(E_4)$ $4z^2 + 12mz + 36m + 48 = 3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

$(E_5)$ $z^7 = z$

## Exercice 11

Déterminer tous les couples $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ de nombres complexes tels que :

$$u + v = 4 \quad \text{et} \quad uv = 2(\sqrt{5} - 1).$$

## Exercice 12

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \qquad z_2 = (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^4 \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R})$$

$$z_3 = \frac{6 - 4i}{5 + i} \qquad z_4 = \frac{11 + 3i}{1 + i}$$

## Exercice 13

Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, écrire le nombre complexe suivant sous forme exponentielle :

$$z = (\cos(\alpha) + \sin(\beta)) + i\,(\sin(\alpha) + \cos(\beta)).$$