Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 2

Nombres réels

Exercice 1

ATTENTION : la calculatrice est interdite pour cet exercice !
Déterminer la partie entière des réels suivants :

$$a = \sqrt{42}, \quad b = \sqrt{11} + \sqrt{13}, \quad c = \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} \quad \text{et} \quad d = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E_1) $3 - x = \frac{4}{x+1}$

(E_2) $|2x - 4| = x + 1$

(E_3) $\ln(x - 2) + \ln(x + 2) = \ln(3x)$

(E_4) $m^2x^2 + 2mx = 3$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

(E_5) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5}$

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(I_1) $|2x + 3| \geqslant x + 3$

(I_2) $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0$

(I_3) $x < \frac{1}{x}$

(I_4) $2e^{2x} - 7e^x - 15 > 0$

(I_5) $\frac{x}{x-2} < \frac{6}{x-1}$

Exercice 4

ATTENTION : la calculatrice est interdite pour cet exercice !
Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on définit l'approximation décimale de x par défaut à 10^{-n} près par : $A_n(x) = 10^{-n}\lfloor 10^n x \rfloor$.

1. Vérifier que $A_n(x) \leqslant x$.
2. Donner un majorant Δ de l'écart entre x et $A_n(x)$.
3. Peut-on avoir $A_n(x) = x$? Et $x - A_n(x) = \Delta$?
4. Sachant que $A_3(\sqrt{2}) = 1,414$, déterminer $A_2(\sqrt{2})$ et $A_2(-\sqrt{2})$.
5. Sachant que $A_3(e) = 2,718$, déterminer $A_2(e + \sqrt{2})$ et $A_2(e - \sqrt{2})$.
6. Déterminer $A_2(e\sqrt{2})$ et $A_2\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 2b$. Simplifier l'expression suivante :

$$\sqrt{a + 2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} + \sqrt{a - 2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}.$$

Exercice 6

Pour chacun des ensembles suivants donner, s'ils existent, le plus petit élément, le plus grand élément, la borne inférieure et la borne supérieure.

$A = [0, 1] \cup]2, +\infty[$ $\qquad$ $B =]-1, 0[\cup \{1\}$

$C = \left\{ \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star \right\}$ $\qquad$ $D = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots\}$

$E = \left\{ (-1)^n + \dfrac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ $\qquad$ $F = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor 1 - x \rfloor = 2\}$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(E_1) $\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2$

(E_2) $|x - 1| = |2x - 5|$

(E_3) $x + \sqrt{2x + 1} = 1$

(E_4) $\ln\left((x + 2)(x - 2)\right) = \ln(2x + 11)$

(E_5) $\ln(x + 2) + \ln(x - 2) = \ln(2x + 11)$

(E_6) $2e^{-x} - 6e^x = 1$

(E_7) $x^2 - 2mx - m + 6 = 0$, en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$

(E_8) $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$

(E_9) $x^{x^3} = x^{3x}$

Exercice 8

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(I_1) $x + \frac{1}{x} \geqslant 0$

(I_2) $|3x - 1| > |x + 2|$

(I_3) $(\ln(x))^2 > 1$

(I_4) $\sqrt{(x + 3)(x - 1)} \geqslant 2x - 1$

(I_5) $e^{-2x} - e^{-x} > 0$

(I_6) $\frac{4x^2 - 15x - 3}{2x^2 - 5x - 3} \geqslant 1$

(I_7) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2 - 1)$

(I_8) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1$

(I_9) $\frac{5}{x+9} - \frac{2}{2x+3} > \frac{7}{9(x+1)}$