Feuille de TD n° 20

Continuité

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner les domaines de définition, étudier la continuité et déterminer si elles sont prolongeables par continuité.

$$f_1 : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}$$
$$f_3 : x \mapsto \frac{x^2+4x+3}{\sqrt{x+3}}$$
$$f_4 : x \mapsto (2^x - 2)\ln|1-x|$$
$$f_5 : x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\ln(x+1)}$$

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $T > 0$, on considère l'équation $f(t+T) = f(t)$ d'inconnue $t \in [0, 1-T]$.

1. Pour $T = \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe au moins une solution.
2. On considère $T = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}+T\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
   (b) En déduire que l'équation admet au moins une solution.
3. Lors d'une balade, un écuyer a parcouru 12km en 1h à différentes allures. Montrer qu'il existe un intervalle de temps de 5min pendant lequel l'écuyer a parcouru la même distance que si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade.

Exercice 3

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue.

1. Montrer qu'il existe un point $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
2. Montrer que si f est décroissante, alors c est unique.
3. Qu'en est-il si f est croissante ?

Exercice 4

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que :

$$\exists k > 0,\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1. Montrer que f est continue sur I.
2. On suppose que $k \in]0,1[$ et on suppose qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.
   (a) Montrer que ℓ est unique.
   (b) On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ |u_n - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell|$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 5

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si $\lim_{+\infty} f$ existe et est finie, alors f est bornée.
2. Montrer que si $\lim_{+\infty} f = +\infty$, alors f est minorée et sa borne inférieure est atteinte.
3. Montrer que si $f(0) < 0$ et que $\lim_{+\infty} f$ existe et est strictement positive, alors f s'annule au moins une fois sur $]0, +\infty[$.
4. Montrer à l'aide de contre-exemples que les réciproques des affirmations précédentes sont fausses.

Exercice 6

Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x = e^{\lambda x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f. Montrer qu'il existe au moins un $y_0 \in \mathbb{R}$ qui admet exactement un seul antécédent par f. (*Indication* : faire des dessins!!!)