

Dérivation

Exercice 1

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale, on en déduit que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Il reste à étudier la limite du taux d'accroissement en 1 (en posant $x = 1 + h$) :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \\ &= \frac{1}{2} \quad (\text{car } \sqrt{1+h} - 1 \sim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2}) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx + 1 - \sqrt{1}}{x - 1} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a(1+h)^2 + b(1+h)}{h} \\ &= 2a + b + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{a+b}{h}. \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ existe et est finie si et seulement si $a + b = 0$ et $2a + b = \frac{1}{2}$. On en déduit que le seul couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* est $(a, b) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Exercice 2

- On a $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$ par encadrement, donc f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\frac{1}{x}) = 0$ par encadrement, donc le prolongement continu de f_1 est dérivable en 0 avec $f_1'(0) = 0$.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(\sqrt{x}) = 1$, donc f_2 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_2(0) = 1$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sqrt{x}) - 1}{x} = -\frac{1}{2}$ car $\cos(X) - 1 \sim_{X \rightarrow 0} -\frac{X^2}{2}$, donc le prolongement continu de f_2 est dérivable en 0 avec $f_2'(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Puisque f est dérivable en a , f admet un $DL_1(a)$ de la forme : $f(a + x) = f(a) + f'(a)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$. On en déduit avec le changement de variable $x \mapsto -x$: $f(a - x) = f(a) - f'(a)x + o_{x \rightarrow 0}(x)$. Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2f'(a) + o_{x \rightarrow 0}(1)) = 2f'(a).$$

Exercice 4

On pose $g : y \mapsto y - e^{-xy}$ où $x > 0$ est fixé. Alors g est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables et $\forall y > 0, g'(y) = 1 + xe^{-xy} > 0$. De plus $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = -1$ et $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = +\infty$. Ainsi $g :]0, +\infty[\rightarrow]-1, +\infty[$ est continue et strictement croissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection. En particulier, $g(y) = 0 \Leftrightarrow y = e^{-xy}$ admet une unique solution notée $y = f(x) > 0$ qui vérifie $f(x) = e^{-xf(x)} \Leftrightarrow x = -\frac{\ln(f(x))}{f(x)}$. Si $x' > x$ alors $g(f(x')) = f(x') - e^{-x'f(x')} < f(x') - e^{-x'f(x)} = 0 = g(f(x))$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante) donc $f(x') < f(x)$ (car g est strictement croissante) donc f est strictement décroissante. Or f est minorée par 0 et majorée par 1 (car $xf(x) > 0 \Rightarrow f(x) = e^{-xf(x)} < e^0 = 1$). On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ existent d'après le théorème de convergence monotone et sont positives. Par conséquent, $f(x) = e^{-xf(x)}$ donne en passant à la limite : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Ainsi $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, 1[$. On pose $h]0, 1[\rightarrow]0, +\infty[: y \mapsto -\frac{\ln(y)}{y}$. Alors h est dérivable sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall y > 0, h'(y) = \frac{-1 + \ln(y)}{y^2} < 0$. Ainsi h est continue et strictement décroissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection. Puisque $h \circ f : x \mapsto -\frac{\ln(f(x))}{f(x)} = x$, on en déduit que f est la bijection réciproque de h . Toujours d'après le théorème de la bijection, $f = h^{-1}$ est dérivable aux points $x > 0$ tels que $h'(h^{-1}(x)) = \frac{-1 + \ln(f(x))}{f(x)^2} = \frac{-1 - xf(x)}{f(x)^2} \neq 0$ ce qui est toujours vrai. Par conséquent, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, f'(x) = (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = -\frac{f(x)^2}{xf(x)+1}$.

Exercice 5

- On a $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \neq 0$, donc f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme composée de fonctions dérivables. De plus :

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$
- On a $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) < 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 1$. Ainsi $f :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]1, +\infty[$ est continue et strictement décroissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection.
- Toujours d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est dérivables aux points $y \in]1, +\infty[$ tels que $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Or

$$y = f(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\sin(f^{-1}(y))} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \arcsin\left(\frac{1}{y}\right) \quad (\text{car } f^{-1}(y) \in]0, \frac{\pi}{2}[)$$

donc

$$\begin{aligned} f'(f^{-1}(y)) &= -\frac{\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)} \\ &= -\frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}}{1/y^2} \\ &= -y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}} \neq 0 \end{aligned}$$

(car $\arcsin\left(\frac{1}{y}\right) \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right) \geq 0$). Par conséquent, f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall y > 1, (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = -\frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle centré en 0. On note $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une primitive de f .

- Si f est impaire alors $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$ ce qui donne en dérivant $\forall x \in I, -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire.
- Si f est paire alors $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$ ce qui donne en dérivant $\forall x \in I, -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ donc f' est impaire.
- Si f est impaire alors $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$ ce qui donne en intégrant $\forall x \in I, \int_0^x f(-t)dt = \int_0^x -f(t)dt \Leftrightarrow [-F(-t)]_0^x = [-F(t)]_0^x \Leftrightarrow -F(-x) + F(0) = -F(x) + F(0) \Leftrightarrow F(-x) = F(x)$ donc F est paire.
- Si f est paire alors $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$ ce qui donne en intégrant $\forall x \in I, \int_0^x f(-t)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [-F(-t)]_0^x = [F(t)]_0^x \Leftrightarrow -F(-x) + F(0) = F(x) - F(0) \Leftrightarrow F(-x) = -F(x) + 2F(0)$. En particulier, F n'est pas impaire dès que $F(0) \neq 0$ (il suffit donc de prendre comme contre-exemples $f : x \rightarrow 0$ et $F : x \rightarrow 42$, ou $f : x \rightarrow \cos(x)$ et $F : x \rightarrow \sin(x) + 42$).

Exercice 7

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} telle que $f(-1) = 0, f(0) = 2$ et $f(1) = 1$. Puisque $f(-1) < \frac{1}{2}, f(0) > \frac{1}{2}$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1, 0])$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires $a \in]-1, 0[$ tel que $f(a) = \frac{1}{2}$. Puisque $\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = 2$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1, 0]) \cap \mathcal{D}^1(]-1, 0[)$, il existe d'après le théorème des accroissements finis $b \in]-1, 0[$ tel que $f'(b) = 2$. De même, il existe $b' \in]0, 1[$ tel que $f'(b') = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -1$. Enfin, puisque $b < b'$ et $f' \in \mathcal{C}^0(]b, b'[) \cap \mathcal{D}^1(]b, b'[)$, il existe $c \in]b, b'[$ tel que $f''(c) = \frac{f'(b')-f'(b)}{b'-b} = \frac{-3}{b'-b} < 0$.

Exercice 8

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

- On étudie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et surtout la position relative de sa courbe représentative par rapport à la droite d'équation $y = x$. On pose $g : x \mapsto f(x) - x = \sqrt{1+x} - x$. La fonction g est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $] -1, +\infty[$ (comme somme et composée de fonctions dérivables) avec $\forall x \in] -1, +\infty[, g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$. Donc g est strictement croissante sur $[-1, -\frac{3}{4}[$ et strictement décroissante sur $] -\frac{3}{4}, +\infty[$. De plus $g(-1) = 1, g(-\frac{3}{4}) = \frac{5}{4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{\frac{1+x}{x^2}} - 1 \right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0$. Or $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow (1+x = x^2 \text{ et } x \geq 0) \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$). Donc g est strictement positive sur $[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ et strictement négative sur $] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$. La fonction f est définie sur $[-1, +\infty[$ et dérivable sur $] -1, +\infty[$ avec $\forall x \in] -1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. Donc la courbe représentative de f est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$, au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $[-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ et au-dessous sur $] \frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$ (avec $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). En représentant les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à l'aide du graphique de la courbe représentative de f , on observe que $(u_n)_{n \geq 0}$ semble croissante dans $\left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et semble converger vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Démontrons par récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$. Si on suppose que $u_n \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ pour un certain $n \geq 0$ fixé, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in \left[f(1), f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \left[\sqrt{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \subset \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ car f est croissante. On en déduit d'après le principe de récurrence que $\forall n \geq 0, u_n \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Par conséquent, $\forall n \geq 0, u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geq 0$ donc la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n \geq 0}$ converge vers une limite $\varphi \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ qui vérifie $f(\varphi) = \varphi$ (en passant $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite quand $n \rightarrow +\infty$), c'est-à-dire $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- On a $\forall x \in [1, \varphi], 0 \leq f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}$ car $\sqrt{1+x} \geq \sqrt{2} > 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\forall x \in [1, \varphi], 0 \times (\varphi - x) \leq f(\varphi) - f(x) \leq \frac{1}{2}(\varphi - x)$$

ce qui donne avec $x = u_n$:

$$\forall n \geq 0, 0 \leq \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$

car $f(\varphi) = \varphi$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \geq 0, 0 \leq \varphi - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi - 1)$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$. On suppose le résultat vrai pour un certain $n \geq 0$ fixé. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$0 \leq \varphi - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\varphi - u_n) \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\varphi - 1)$$

donc le résultat est vrai pour $n + 1$. On en déduit le résultat pour tout $n \geq 0$ d'après le principe de récurrence.

4. On cherche $N \geq 0$ suffisamment grand pour que u_N soit une approximation de φ à 10^{-42} près. D'après le résultat de la question précédente, il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^N (\varphi - 1) \leq 10^{-42}$. Puisque $\varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 < 1$, il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^N \leq 10^{-42} \Leftrightarrow N \geq \frac{\ln(10^{-42})}{\ln(1/2)} = 42 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} > 139$ (car $\ln(1/2) < 0$). Ainsi $N = 140$ convient.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-1}$.

1. La fonction f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, qui est donc définie dès que son dénominateur est non nul. Puisque $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$, on en déduit que $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
2. f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{D}_f en tant que quotient de deux fonctions polynomiales (qui sont donc de classe \mathcal{C}^∞) dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathcal{D}_f .
3. On a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1}$$

donc $a + b = 1$ et $a - b = 2$ par identification, et par conséquent $(a, b) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

4. Si $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors $h^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par composition que :

$$f^{(n)} : x \mapsto a \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^n} + b \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^n} = \frac{(-1)^n n!}{2} \left(\frac{3}{(x-1)^n} - \frac{1}{(x+1)^n} \right).$$