Corrigé de la feuille de TD n^{o} 20

Continuité

Exercice 1

1. $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbb{R}^\star$ et f_1 est continue sur $\mathbb{R}^\star$ par produit et composition de fonctions usuelles. De plus, $\lim_{x\to 0} f_1(x) = 0$ d'après le théorème d'encadrement car $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ 0 \leqslant |f_1(x)| \leqslant |\sin(x)|$. Donc f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0) = 0$.
2. $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ et f_2 est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$ par somme et inverse de fonctions usuelles non nulles. De plus, $f_2 : x \mapsto \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-1}{1+x}$ donc $\lim_{x\to -1} f_2(x)$ n'existe pas et $\lim_{x\to +1} f_2(x) = -\frac{1}{2}$. Par conséquent, f_2 ne se prolonge pas par continuité en -1 mais se prolonge par continuité en $+1$ en posant $f_2(1) = -\frac{1}{2}$.
3. $\mathcal{D}_{f_3} =]-3, +\infty[$ et f_3 est continue sur $]-3, +\infty[$ par composition et quotient (dont le dénominateur est non nul) de fonctions usuelles. De plus :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -3^+} f_3(x) &= \lim_{y\to 0^+} f(y-3) \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{(y-3)^2 + 4(y-3) + 3}{\sqrt{y}} \\
&= \lim_{y\to 0^+} \frac{y^2 - 2y}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0^+} \sqrt{y}(y-2) = 0.
\end{aligned}$$

   Donc f_3 se prolonge par continuité en -3 en posant $f_3(-3) = 0$.
4. $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et f_4 est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par produit et composition de fonctions usuelles. On a en posant $x = 1-y$: $2^x - 2 = 2^{1-y} - 2 = 2(2^{-y} - 1) \sim_{y\to 0} -2\ln(2)y$, donc, d'après le théorème des croissances comparées :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f_4(x) &= \lim_{y\to 0^+} f_4(1-y) = \lim_{y\to 0^+} \left(2^{1-y} - 2\right)\ln|y| \\
&= \lim_{y\to 0^+} -2\ln(2)y\ln(y) = 0 \\
\text{et} \quad \lim_{x\to 1^+} f_4(x) &= \lim_{y\to 0^-} f_4(1-y) = \lim_{y\to 0^-} \left(2^{1-y} - 2\right)\ln|y| \\
&= \lim_{y\to 0^-} -2\ln(2)y\ln(-y) = 0.
\end{aligned}$$

   Par conséquent, f_4 se prolonge par continuité en 1 en posant $f_4(1) = 0$.
5. $\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}_+^\star$ et f_5 est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$ par composition et quotient (dont le dénominateur est non nul) de fonctions usuelles. De plus $\cos(\sqrt{x}) - 1 \sim_{x\to 0^+} -\frac{(\sqrt{x})^2}{2} = -\frac{x}{2}$ et $\ln(x+1) \sim_{x\to 0^+} x$ donc $f_5(x) \sim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2x} = -\frac{1}{2}$. Par conséquent, f_5 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_5(0) = -\frac{1}{2}$.

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $T > 0$, on considère l'équation $f(t+T) = f(t)$ d'inconnue $t \in [0, 1-T]$.

1. On considère la fonction $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$. La fonction g est continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par composition et somme de fonctions continues. Puisque $f(0) = f(1)$, on a :

$$\begin{aligned}
g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)\left(f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)\left(f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \\
&= -\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)\right)^2 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

   Si $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ alors $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0)$ et donc $t = 0$ est solution de l'équation $f\left(t + \frac{1}{2}\right) = f(t)$. Sinon $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe au moins un $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(t) = 0$, c'est-à-dire une solution de l'équation $f\left(t + \frac{1}{2}\right) = f(t)$.
2. On considère $T = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n} + T\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) \\
&= f(1) - f(0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

   (b) On considère la fonction $g : \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}, t \mapsto f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)$. La fonction g est continue sur le segment $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par composition et somme de fonctions continues. D'après le résultat de la question précédente, on a $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$. Par conséquent, soit tous les nombres $g(0)$, $g\left(\frac{1}{n}\right)$, $g\left(\frac{2}{n}\right)$, $\ldots$, $g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ sont égaux à 0 et alors ils sont tous solutions de l'équation $f\left(t+\frac{1}{n}\right)=f(t)$, ou bien il existe deux de ces nombres qui sont non nuls et de signes opposés. Dans le deuxième cas, on note $g(a)$ et $g(b)$ ces deux nombres avec $a<b$ puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires pour obtenir au moins une solution de l'équation $f\left(t+\frac{1}{n}\right)=f(t)$ sur le segment $[a,b]\subset\left[0,\frac{n-1}{n}\right]=\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$.

3. On note d la fonction qui associe au temps $t\in[0,1]$ (en heures) la distance $d(t)$ (en kilomètres) parcourue par l'écuyer. La fonction d est bien sûr continue et $d(1)=12$. Si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade, alors cette vitesse aurait été de 12km/h et l'écuyer aurait parcouru $12t$ kilomètres à l'instant $t\in[0,1]$. On considère la fonction $f:[0,1]\in\mathbb{R},t\mapsto d(t)-12t$. Alors $f\in\mathcal{C}^0([0,1])$ comme somme de fonctions continues et $f(1)=d(1)-12=0=f(0)$. D'après le résultat de la question précédente pour $T=\frac{1}{12}$ (car 1h/12=5min), on sait qu'il existe un $t\in\left[0,1-\frac{1}{12}\right]$ tel que $f\left(t+\frac{1}{12}\right)=f(t)$, c'est-à-dire tel que : $d\left(t+\frac{1}{12}\right)-d(t)=12\left(t+\frac{1}{12}\right)-12t$. Par conséquent, la distance $d\left(t+\frac{1}{12}\right)-d(t)$ parcouru par l'écuyer dans l'intervalle $\left[t,t+\frac{1}{12}\right]$ de 5min est la même que la distance $12\left(t+\frac{1}{12}\right)-12t$ parcouru par l'écuyer dans le même intervalle de temps si le cheval avait conservé une vitesse constante pendant toute la balade.

Exercice 3

Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une fonction continue.

1. On considère la fonction $g:[a,b]\to\mathbb{R},x\mapsto f(x)-x$. La fonction g est continue sur $[a,b]$ comme somme de fonctions continues. Puisque $(f(a),f(b))\in[a,b]^2$ on a $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$ et $g(b)=f(b)-b\leqslant 0$, donc $g(a)g(b)\leqslant 0$. Si $g(a)g(b)=0$ alors $f(a)-a=0$ ou $f(b)-b=0$, donc $c=a$ ou $c=b$ est solution de l'équation $f(c)=c$. Sinon $g(a)g(b)<0$ donc on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires : il existe au moins un $c\in[a,b]$ tel que $g(c)=0$, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(c)=c$.
2. On suppose que f est décroissante et qu'il existe deux nombres réels distincts $(c_1,c_2)\in[a,b]^2$ tels que $f(c_1)=c_1$ et $f(c_2)=c_2$. On peut supposer que $c_1<c_2$ (sinon on inverse les notations de c_1 et c_2), alors $c_1<c_2=f(c_2)\leqslant f(c_1)=c_1$ et donc $c_1<c_1$ ce qui est absurde. Donc il existe au plus un nombre réel $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.
3. Si f est croissante, il n'y a pas nécessairement unicité de la solution de l'équation $f(c)=c$. Par exemple si $f:[a,b]\to[a,b],x\mapsto x$ il y a une infinité de solutions (tous les nombres de $[a,b]$).

Exercice 4

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On suppose que :

$$\exists k>0,\ \forall(x,y)\in I^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|.$$

1. Soit $a\in I$. On a $\forall x\in I,\ 0\leqslant|f(x)-f(a)|\leqslant k|x-a|$. Or $\lim_{x\to a}k|x-a|=0$. Donc d'après le théorème d'encadrement $\lim_{x\to a}|f(x)-f(a)|=0$ c'est-à-dire $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Par conséquent f est continue en a pour tout $a\in$ I, c'est-à-dire $f\in\mathcal{C}^0(I)$.
2. On suppose que $k\in]0,1[$ et on suppose qu'il existe $\ell\in I$ tel que $f(\ell)=\ell$.
   (a) On suppose qu'il existe deux nombres réels distincts $(\ell_1,\ell_2)\in I^2$ tels que $f(\ell_1)=\ell_1$ et $f(\ell_2)=\ell_2$. Alors $|\ell_1-\ell_2|=|f(\ell_1)-f(\ell_2)|\leqslant k|\ell_1-\ell_2|$ et donc $1\leqslant k$ car $|\ell_1-\ell_2|>0$. Or ceci est absurde car $k\in]0,1[$ donc il existe au plus un nombre réel $\ell\in I$ tel que $f(\ell)=\ell$.
   (b) On définit une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0\in I$ et la relation de récurrence $\forall n\geqslant 0,\ u_{n+1}=f(u_n)$. Montrons par récurrence que $\forall n\geqslant 0,\ |u_n-\ell|\leqslant k^n|u_0-\ell|$. Pour $n=0$ l'inégalité est vraie car $k^0=1$. On suppose que l'inégalité est vraie pour un rang $n\geqslant 0$ fixé. On a :

$$|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)|\leqslant k|u_n-\ell|\leqslant k\times k^n|u_0-\ell|=k^{n+1}|u_0-\ell|.$$

   Donc l'inégalité est héréditaire. On en déduit que $\forall n\geqslant 0,\ 0\leqslant|u_n-\ell|\leqslant k^n|u_0-\ell|$ d'après le principe de récurrence. Or $\lim_{n\to+\infty}k^n|u_0-\ell|=0$ car $k\in]0,1[$. Donc d'après le théorème d'encadrement $\lim_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell$.

Exercice 5

Soit $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell\in\mathbb{R}$. On fixe $\varepsilon=1>0$. Alors il existe $A\geqslant 0$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $|f(x)-\ell|\leqslant 1$. En particulier pour tout $x\in[A,+\infty[$, $\ell-1\leqslant f(x)\leqslant\ell+1$. De plus, d'après le théorème des bornes, $f|_{[0,A]}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que pout tout $x\in[0,A]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. En posant $m'=\min\{\ell-1,m\}$ et $M'=\max\{\ell+1,M\}$, on a donc $m'\leqslant f(x)\leqslant M'$ pour tout $x\in[A,+\infty[\cup[0,A]=[0,+\infty[$. On en déduit que f est bornée.
2. On suppose que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. On fixe $B=f(1)$. Alors il existe $A\geqslant 1$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $f(x)\geqslant f(1)$. De plus, d'après le théorème des bornes, $f|_{[0,A]}$ est minorée et atteint sa borne inférieure, c'est-à-dire qu'il existe $a\in[0,A]$ tel que pour tout $x\in[0,A]$, $f(x)\geqslant f(a)$. En particulier $f(1)\geqslant f(a)$ (car $1\in[0,A]$) et donc $f(x)\geqslant f(a)$ pour tout $x\in[A,+\infty[\cup[0,A]=[0,+\infty[$. On en déduit que f est minorée et atteint sa borne inférieure.
3. On suppose que $f(0)<0$ et que $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell>0$. On fixe $\varepsilon=\frac{\ell}{2}>0$. Alors il existe $A\geqslant 0$ tel que pour tout $x\geqslant A$, $|f(x)-\ell|\leqslant\frac{\ell}{2}$. En particulier $f(A)\geqslant\ell-\frac{\ell}{2}=\frac{\ell}{2}>0$ et donc $f(0)f(A)<0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f|_{[0,A]}$ s'annule au moins une fois, c'est-à-dire qu'il existe $a\in[0,A]$ tel que $f(a)=0$. On en déduit que f s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$ (puisque $f(0)\neq 0$).

4) $f_1:x\to\cos(x)$ est une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$, mais $\lim_{x\to+\infty}f_1(x)$ n'existe pas. $f_2:x\mapsto 0$ est une fonction continue, minorée qui atteint sa borne inférieure sur $[0,+\infty[$, mais $\lim_{x\to+\infty}f_2(x)=0\neq+\infty$. De même, $f_3:x\to 0$ est une fonction continue sur $[0,+\infty[$ qui s'annule au moins une fois sur $]0,+\infty[$ mais $f(0)\geqslant 0$ (et même $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\leqslant 0$).

Exercice 6

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x - e^{\lambda x}$. La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \lambda e^{\lambda x}.$$

<u>1er cas</u> : $\lambda = 0$. Alors l'équation $x = e^{\lambda x} \Leftrightarrow x = 1$ admet une unique solution.
<u>2e cas</u> : $\lambda > 0$. Alors $f'(x) > 0$ si et seulement si $x < -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty, -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}[$ et strictement décroissante sur $]-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}, +\infty[$. Or :

$$f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) = -\frac{(\ln(\lambda)+1)}{\lambda} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

<u>1er sous-cas</u> : $\lambda = e^{-1}$. Alors $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) = 0$ et donc l'équation $x = e^{\lambda x}$ admet une unique solution $x = -\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} = e$.
<u>2e sous-cas</u> : $\lambda \in]0, e^{-1}[$. Alors $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) > 0$ et donc l'équation $x = e^{\lambda x}$ admet deux solutions d'après le théorème des valeurs intermédiaires.
<u>3e sous-cas</u> : $\lambda \in]e^{-1}, +\infty[$. Alors $f\left(-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}\right) < 0$ et donc l'équation $x = e^{\lambda x}$ n'admet pas de solutions.
<u>3e cas</u> : $\lambda < 0$. Alors $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Donc l'équation $x = e^{\lambda x}$ admet une unique solution d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 7

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe aucun $y \in \mathbb{R}$ qui admet exactement un seul antécédent par f. Puisque chaque $y \in \mathbb{R}$ admet au plus deux antécédents par f par hypothèse, chaque $y \in \mathbb{R}$ a donc aucun antécédent (s'il n'est pas dans l'image directe de $\mathbb{R}$ par f) ou exactement deux antécédents par f.

Soit $y = f(\mathbb{R})$. On note a et b les deux antécédents de y par f avec $a < b$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, car continue sur $\mathbb{R}$, f atteint un minimum et un maximum sur $[a, b]$. De plus, $y = f(a) = f(b)$ ne peut être à la fois minimum et maximum de f sur $[a, b]$ (sinon f serait constante sur $[a, b]$ et donc y aurait une infinité d'antécédents). Donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) \neq y$ et $f(c)$ est un minimum ou un maximum de f sur $[a, b]$.

<u>1er cas</u> : $f(c)$ est un minimum de f sur $[a, b]$. On note c' le deuxième antécédent de $f(c)$ par f (donc $c' \neq a$ et $c' \neq b$ car $f(c') = f(c) \neq y = f(a) = f(b)$). Alors :

- $c' \in]-\infty, a[$ est absurde car sinon on peut trouver $y' \in]f(c), y[$ qui admet au moins trois antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires ;
- $c' \in]a, b[$ est absurde car sinon on peut trouver $y' \in]f(c), y[$ qui admet au moins quatre antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires ;
- $c' \in]b, +\infty[$ est absurde car sinon on peut trouver $y' \in]f(c), y[$ qui admet au moins trois antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

<u>2e cas</u> : $f(c)$ est un maximum de f sur $[a, b]$. On note c' le deuxième antécédent de $f(c)$ par f (donc $c' \neq a$ et $c' \neq b$ car $f(c') = f(c) \neq y = f(a) = f(b)$). En raisonnant comme dans le 1er cas à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on obtient une absurdité dans chacun des cas $c' \in]-\infty, a[$, $c' \in]a, b[$ et $c' \in]b, +\infty[$.

Finalement, on obtient une absurdité dans tous les cas, donc il existe au moins un $y_0 \in \mathbb{R}$ qui admet exactement un seul antécédent par f.