Feuille de TD n° 21

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

Pour chacun des ensembles suivants, démontrer s'il s'agit d'un sous-espace vectoriel ou non.

$$E_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0 \text{ et } 2x+5z=0\Big\}$$
$$E_2 = \Big\{(2a-b, a+3b+1, a-b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$
$$E_3 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+3y=2\Big\}$$
$$E_4 = \Big\{(a+3b, a-b, 2a-b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\Big\}$$
$$E_5 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+2y=0\Big\}$$
$$E_6 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x-z=0 \text{ et } |y+z|=0\Big\}$$
$$E_7 = \Big\{(z+w, z-w, z) \,|\, (z,w) \in \mathbb{C}^2\Big\}$$
$$E_8 = \Big\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, \overline{z}-w=0\Big\}$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille formée des vecteurs suivants est liée :

$$\overrightarrow{u} = (4-\lambda, 4, 4), \quad \overrightarrow{v} = (3, 3-\lambda, 6) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = (3, 6, 3-\lambda).$$

Exercice 3

Montrer que l'ensemble de représentation cartésienne suivante est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+2z-t &=& 0 \\ 2x-z+2t &=& 0 \end{array} \right.$$

Puis déterminer une famille de vecteurs qui engendre F.

Exercice 4

Montrer que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (0,2,-1,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,2,0)$, $\overrightarrow{u_3} = (-1,1,1,-1)$ et $\overrightarrow{u_4} = (2,0,0,2)$ de $\mathbb{R}^4$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ dont on déterminera une représentation cartésienne.

Exercice 5

On fixe $a \in \mathbb{R}$ et on considère le sous-ensemble $F_a \subset \mathbb{R}^4$ définie par la représentation cartésienne suivant :

$$F_a : \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z-t &=& 0 \\ x-y+z+t &=& 0 \\ x+2y-at &=& 0 \end{array} \right.$$

Montrer que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ puis déterminer, en fonction de a, une famille de vecteurs qui engendre F_a.

Exercice 6

Dans $\mathbb{C}^4$, on considère les sous-ensembles suivants :

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} x+iy-z-it &=& 0 \\ x-y-z+t &=& 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad G = \big\{((1-i)a, b-(1+i)a, 2a, b) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\big\}.$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels, puis déterminer une représentation cartésienne de $F \cap G$ ainsi qu'une famille de vecteurs qui engendrent $F \cap G$.