Feuille de TD n° 21

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

Dire si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+y-z=0 \text{ et } 2x+5z=0\right\}$$
$$E_2 = \left\{(2a-b, a+3b+1, a-b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$E_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+3y=2\right\}$$
$$E_4 = \left\{(a+3b, a-b, 2a-b) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
$$E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+2y=0\right\}$$
$$E_6 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x-z=0 \text{ et } |y+z|=0\right\}$$
$$E_7 = \left\{(z+w, z-w, z) \,|\, (z,w) \in \mathbb{C}^2\right\}$$
$$E_8 = \left\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \,|\, \overline{z}-w=0\right\}$$

Exercice 2

Etudier la liberté de la famille $\overrightarrow{u} = (4-m, 4, 4)$, $\overrightarrow{v} = (3, 3-m, 6)$ et $\overrightarrow{w} = (3, 6, 3-m)$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{v_2} = (-1,-2,0), \quad \overrightarrow{v_3} = (0,1,0), \quad , \overrightarrow{v_4} = (2,3,-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_5} = (1,1,1).$$

Montrer que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5})$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E : x+2y+3z=0 \quad \text{et} \quad F : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & r \\ y & = & r+s \\ z & = & s \end{array}\right. , \ (r,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer une base de E, une base de F et une base de $E \cap F$.

Exercice 5

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{C}^4$ définis par :

$$E : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & r \\ y & = & r+s \\ z & = & r+s \\ t & = & s \end{array}\right. , \ (r,s) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad F : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & iy & - & z & - & it & = & 0 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 0 \end{array}\right. .$$

Déterminer une base de E, une base de F et une base de $E \cap F$. Puis montrer que la famille formée par les vecteurs de la base de E et les vecteurs de la base de F est une base de $\mathbb{C}^4$.

Exercice 6

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble E_m des vecteurs $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 2y & & & - & mt & = & 0 \end{array}\right. .$$

Démontrer que E_m est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.