Corrigé de la feuille de TD n° 21

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\overrightarrow{0} \notin E_2$;
3. E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\overrightarrow{0} \notin E_3$;
4. E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;
5. E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(2,-2) \in E_5$ mais $2 \times (2,-2) = (4,-4) \notin E_5$;
6. E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $|y+z| = 0 \Leftrightarrow y+z=0$;
7. E_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$;
8. E_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ car $(1,1) \in E_8$ mais $i \times (1,1) = (i,i) \notin E_8$.

Exercice 2

La famille est liée si et seulement si $\lambda \in \{-3, 1, 12\}$.

Exercice 3

F est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$. C'est un plan vectoriel engendré par exemple par $(1,5,2,0)$ et $(0,3,2,1)$.

Exercice 4

On obtient par exemple $3x+y-z-3t=0$.

Exercice 5

F_a est l'intersection de trois hyperplans. Si $a=2$, F_2 est un plan vectoriel engendré par exemple par $(-2,1,3,0)$ et $(2,0,-3,1)$. Si $a \neq 2$, F_a est une droite vectorielle engendrée par exemple par $(-2,1,3,0)$.

Exercice 6

F est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{C}^4$. G est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0,1,1,1)$. Une représentation cartésienne de G est par exemple :

$$G : \left\{ \begin{array}{rcl} ix - y + t & = & 0 \\ x - y - iz + t & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où une représentation cartésienne de $F \cap G$:

$$F \cap G : \left\{ \begin{array}{rcl} x + iy - z - it & = & 0 \\ x - y - z + t & = & 0 \\ ix - y + t & = & 0 \\ x - y - iz + t & = & 0 \end{array} \right.$$

On résout le système pour obtenir une représentation paramétrique, par exemple :

$$F \cap G : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & t \\ z & = & 0 \\ t & = & t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}.$$

On reconnaît une représentation cartésienne du sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $\overrightarrow{w} = (0,1,0,1)$.