Corrigé de la feuille de TD n° 21

L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;
2. E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\overrightarrow{0} \notin E_2$;
3. E_3 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $\overrightarrow{0} \notin E_3$;
4. E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$;
5. E_5 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ car $(2,-2) \in E_5$ mais $2 \times (2,-2) = (4,-4) \notin E_5$;
6. E_6 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car $|y+z| = 0 \Leftrightarrow y+z=0$;
7. E_7 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$;
8. E_8 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ car $(1,1) \in E_8$ mais $i \times (1,1) = (i,i) \notin E_8$.

Exercice 2

La famille est libre si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 12\}$.

Exercice 3

Par exemple $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ extraite de la famille génératrice $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5})$.

Exercice 4

Par exemple les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-2,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-3,0,1)$ forment une base de E, les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_4} = (0,1,1)$ une base de F et le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (5,2,-3)$ une base de $E \cap F$.

Exercice 5

Par exemple les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,1,1,0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0,1,1,1)$ forment une base de E, les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = (1,0,1,0)$ et $\overrightarrow{v_4} = (0,1,0,1)$ une base de F. Puisque $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$, une base de $E \cap F$ ne contient aucun vecteur, la seule base de $E \cap F$ est donc la famille vide $\emptyset$.

Exercice 6

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (-2,1,3,0)$ forme une base de E_m. Sinon $m = 2$ et alors les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-2,1,3,0)$ et $\overrightarrow{v_1} = (0,1,0,1)$ forment une base de E_2.