Feuille de TD n° 22

Dérivation

Exercice 1

Déterminer tous les $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la fonction suivante soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$:

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si} \quad x \in]1, +\infty[\end{cases}.$$

Exercice 2

Montrer que les fonctions suivantes se prolongent par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement continu :

$$f_1 : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad f_2 : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\sqrt{x}).$$

Exercice 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et dérivable en $a \in I$. Montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{x} = 2f'(a)$.

Exercice 4

Pour tout $x > 0$, rappeler que l'équation $y = e^{-xy}$ d'inconnue $y > 0$ admet une unique solution que l'on notera $y = f(x)$. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \; f'(x) = -\frac{f(x)^2}{xf(x)+1}.$$

Exercice 5

On considère la fonction $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to]1, +\infty[, x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f est bijective.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle centré en 0. On note $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f.

1. Démontrer que si f est impaire alors f' est paire.
2. Démontrer que si f est paire alors f' est impaire.
3. Démontrer que si f est impaire alors F est paire.
4. Que peut-on dire de la parité de F si f est paire ?

Exercice 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(a) = \frac{1}{2}$, $f'(b) = 2$ et $f''(c) < 0$.

Exercice 8

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \; u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

1. Etudier la nature de $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On note $\varphi = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \; 0 \leqslant \varphi - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$.
3. En déduire que $\forall n \geqslant 0, \; 0 \leqslant \varphi - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi - 1)$.
4. Déterminer $N \geqslant 0$ suffisamment grand pour que u_N soit une approximation de φ à 10^{-42} près.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$.
3. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f, \; f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$.
4. En déduire l'expression de $f^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.