Corrigé de la feuille de TD n° 22

Dérivation

Exercice 1

Puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et $x \mapsto ax^2+bx+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, on en déduit que f est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Il reste à étudier la limite du taux d'accroissement en 1 (en posant $x=1+h$) :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{1}}{x-1} \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \\
&= \frac{1}{2} \quad (\text{car } \sqrt{1+h}-1 \sim_{h\to 0} \frac{h}{2}) \\
\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1^+} \frac{ax^2+bx+1-\sqrt{1}}{x-1} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{a(1+h)^2+b(1+h)}{h} \\
&= 2a+b+\lim_{h\to 0^+} \frac{a+b}{h}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ existe et est finie si et seulement si $a+b=0$ et $2a+b=\frac{1}{2}$. On en déduit que le seul couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ est $(a,b)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2

1. On a $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par encadrement, donc f_1 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_1(0)=0$. De plus $\lim_{x\to 0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ par encadrement, donc le prolongement continu de f_1 est dérivable en 0 avec $f_1'(0)=0$.
2. On a $\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0}\cos(\sqrt{x}) = 1$, donc f_2 se prolonge par continuité en 0 en posant $f_2(0)=1$. De plus $\lim_{x\to 0}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sqrt{x})-1}{x} = -\frac{1}{2}$ car $\cos(X)-1 \sim_{X\to 0} -\frac{X^2}{2}$, donc le prolongement continu de f_2 est dérivable en 0 avec $f_2'(0)=-\frac{1}{2}$.

Exercice 3

Puisque f est dérivable en a, f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ de la forme : $f(a+x)=f(a)+f'(a)x+o_{x\to 0}(x)$. On en déduit avec le changement de variable $x\mapsto -x$: $f(a-x)=f(a)-f'(a)x+o_{x\to 0}(x)$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2f'(a)+o_{x\to 0}(1)\right) = 2f'(a).$$

Exercice 4

On pose $g : y\mapsto y-e^{-xy}$ où $x>0$ est fixé. Alors g est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables et $\forall y>0,\ g'(y)=1+xe^{-xy}>0$. De plus $\lim_{y\to 0} g(y)=-1$ et $\lim_{y\to+\infty} g(y)=+\infty$. Ainsi $g :]0,+\infty[\to]-1,+\infty[$ est continue et strictement croissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection. En particulier, $g(y)=0 \Leftrightarrow y=e^{-xy}$ admet une unique solution notée $y=f(x)>0$ qui vérifie $f(x)=e^{-xf(x)} \Leftrightarrow x=-\frac{\ln(f(x))}{f(x)}$. Si $x'>x$ alors $g(f(x'))=f(x')-e^{-xf(x')}<f(x')-e^{-x'f(x')}=0=g(f(x))$ (car la fonction exponentielle est strictement croissante) donc $f(x')<f(x)$ (car g est strictement croissante) donc f est strictement décroissante. Or f est minorée par 0 et majorée par 1 (car $xf(x)>0 \Rightarrow f(x)=e^{-xf(x)}<e^0=1$). On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existent d'après le théorème de convergence monotone et sont positives. Par conséquent, $f(x)=e^{-xf(x)}$ donne en passant à la limite : $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$. Ainsi $f\ :]0,+\infty[\to]0,1[$. On pose $h]0,1[\to]0,+\infty[: y\mapsto -\frac{\ln(y)}{y}$. Alors h est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas et $\forall y>0,\ h'(y)=\frac{-1+\ln(y)}{y^2}<0$. Ainsi h est continue et strictement décroissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection. Puisque $h\circ f : x\mapsto -\frac{\ln(f(x))}{f(x)}=x$, on en déduit que f est la bijection réciproque de h. Toujours d'après le théorème de la bijection, $f=h^{-1}$ est dérivable aux points $x>0$ tels que $h'(h^{-1}(x))=\frac{-1+\ln(f(x))}{f(x)^2}=\frac{-1-xf(x)}{f(x)^2}\neq 0$ ce qui est toujours vrai. Par conséquent, f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ f'(x)=(h^{-1})'(x)=\frac{1}{h'(h^{-1}(x))}=-\frac{f(x)^2}{xf(x)+1}$.

Exercice 5

1. On a $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ \sin(x)\neq 0$, donc f est dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ comme composée de fonctions dérivables. De plus :
$$\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x)=-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$
2. On a $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[,\ f'(x)<0$. De plus $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=1$. Ainsi $f:\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\to]1,+\infty[$ est continue et strictement décroissante, donc bijective d'après le théorème de la bijection.
3. Toujours d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est dérivables aux points $y\in]1,+\infty[$ tels que $f'(f^{-1}(y))\neq 0$. Or
$$y=f(f^{-1}(y))=\frac{1}{\sin(f^{-1}(y))}\Leftrightarrow f^{-1}(y)=\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\quad(\text{car } f^{-1}(y)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[)$$

donc

$$
\begin{aligned}
f'(f^{-1}(y)) &= -\frac{\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}{\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}\\
&= -\frac{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right)}}{1/y^2}\\
&= -y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}} \neq 0
\end{aligned}
$$

(car $\arcsin\left(\frac{1}{y}\right) \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{y}\right)\right) \geqslant 0$). Par conséquent, f^{-1} est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$$\forall y > 1,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = -\frac{1}{y^2\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = -\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{D}^1(I)$ où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle centré en 0. On note $F : I \to \mathbb{R}$ une primitive de f.

1. Si f est impaire alors $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$ ce qui donne en dérivant $\forall x \in I,\ -f'(-x) = -f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = f'(x)$ donc f' est paire.
2. Si f est paire alors $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ ce qui donne en dérivant $\forall x \in I,\ -f'(-x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ donc f' est impaire.
3. Si f est impaire alors $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$ ce qui donne en intégrant $\forall x \in I,\ \int_0^x f(-t)dt = \int_0^x -f(t)dt \Leftrightarrow [-F(-t)]_0^x = [-F(t)]_0^x \Leftrightarrow -F(-x)+F(0) = -F(x)+F(0) \Leftrightarrow F(-x) = F(x)$ donc F est paire.
4. Si f est paire alors $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ ce qui donne en intégrant $\forall x \in I,\ \int_0^x f(-t)dt = \int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow [-F(-t)]_0^x = [F(t)]_0^x \Leftrightarrow -F(-x)+F(0) = F(x) - F(0) \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)+2F(0)$. En particulier, F n'est pas impaire dès que $F(0) \neq 0$ (il suffit donc de prendre comme contre-exemples $f : x \to 0$ et $F : x \to 42$, ou $f : x \to \cos(x)$ et $F : x \to \sin(x)+42$).

Exercice 7

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = 0$, $f(0) = 2$ et $f(1) = 1$. Puisque $f(-1) < \frac{1}{2}$, $f(0) > \frac{1}{2}$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1,0])$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires $a \in]-1,0[$ tel que $f(a) = \frac{1}{2}$. Puisque $\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} = 2$ et $f \in \mathcal{C}^0([-1,0]) \cap \mathcal{D}^1(]-1,0[)$, il existe d'après le théorème des accroissements finis $b \in]-1,0[$ tel que $f'(b) = 2$. De même, il existe $b' \in]0,1[$ tel que $f'(b') = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = -1$. Enfin, puisque $b < b'$ et $f' \in \mathcal{C}^0([b,b']) \cap \mathcal{D}^1(]b,b'[)$, il existe $c \in]b,b'[$ tel que $f''(c) = \frac{f'(b')-f'(b)}{b'-b} = \frac{-3}{b'-b} < 0$.

Exercice 8

Soit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}.$$

1. On étudie la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et surtout la position relative de sa courbe représentative par rapport à la droite d'équation $y = x$. On pose $g : x \mapsto f(x) - x = \sqrt{1+x} - x$. La fonction g est définie sur $[-1,+\infty]$ et dérivable sur $]-1,+\infty[$ (comme somme et composée de fonctions dérivables) avec $\forall x \in]-1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1-2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}$. Donc g est strictement croissante sur $\left[-1,-\frac{3}{4}\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\frac{3}{4},+\infty\right]$. De plus $g(-1) = 1$, $g\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\frac{1+x}{x^2}} - 1\right) = -\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x}{x^2} = 0$. Or $g(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow (1+x = x^2 \text{ et } x \geqslant 0) \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (car $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$). Donc g est strictement positive sur $\left[-1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ et strictement négative sur $\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$. La fonction f est définie sur $[-1,+\infty]$ et dérivable sur $]-1,+\infty[$ avec $\forall x \in]-1,+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} > 0$. Donc la courbe représentative de f est strictement croissante sur $[-1,+\infty]$, au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $\left[-1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ et au-dessous sur $\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right[$ (avec $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). En représentant les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à l'aide du graphique de la courbe représentative de f, on observe que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ semble croissante dans $\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ et semble converger vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Démontrons par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \in \left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$. Si on suppose que $u_n \in \left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ pour un certain $n \geqslant 0$ fixé, alors $u_{n+1} = f(u_n) \subset \left[f(1), f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] = \left[\sqrt{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \subset \left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ car f est croissante. On en déduit d'après le principe de récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ u_n \in \left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Par conséquent, $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\varphi \in \left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$ qui vérifie $f(\varphi) = \varphi$ (en passant $u_{n+1} = f(u_n)$ à la limite quand $n \to +\infty$), c'est-à-dire $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
2. On a $\forall x \in [1,\varphi],\ 0 \leqslant f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leqslant \frac{1}{2}$ car $\sqrt{1+x} \geqslant \sqrt{2} > 1$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que :

$$\forall x \in [1,\varphi],\ 0 \times (\varphi - x) \leqslant f(\varphi) - f(x) \leqslant \frac{1}{2}(\varphi - x)$$

ce qui donne avec $x = u_n$:

$$\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\varphi - u_n)$$

car $f(\varphi) = \varphi$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

3. Montrons par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi - u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi - 1)$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ car $u_0 = 1$. On suppose le résultat vrai pour un certain $n \geqslant 0$ fixé. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$0 \leqslant \varphi - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(\varphi - u_n) \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n (\varphi - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\varphi - 1)$$

donc le résultat est vrai pour $n+1$. On en déduit le résultat pour tout $n \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence.

4. On cherche $N \geqslant 0$ suffisamment grand pour que u_N soit une approximation de φ à 10^{-42} près. D'après le résultat de la question précédente, il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^N (\varphi - 1) \leqslant 10^{-42}$. Puisque $\varphi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 < 1$, il suffit que $\left(\frac{1}{2}\right)^N \leqslant 10^{-42} \Leftrightarrow N \geqslant \frac{\ln(10^{-42})}{\ln(1/2)} = 42\frac{\ln(10)}{\ln(2)} > 139$ (car $\ln(1/2) < 0$). Ainsi $N = 140$ convient.

Exercice 9

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x+2}{x^2-1}$.

1. La fonction f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire un quotient de deux fonctions polynomiales, qui est donc définie dès que son dénominateur est non nul. Puisque $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, on en déduit que $\mathcal{D}_f =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_f$ en tant que quotient de deux fonctions polynomiales (qui sont donc de classe $\mathcal{C}^\infty$) dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}_f$.

3. On a pour tout $x \in \mathcal{D}_f$:

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(a+b)x + (a-b)}{x^2-1}$$

donc $a + b = 1$ et $a - b = 2$ par identification, et par conséquent $(a,b) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

4. Si $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ alors $h^{(n)} : x \mapsto \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par composition que :

$$f^{(n)} : x \mapsto a\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + b\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{3}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right).$$