Feuille de TD n° 23

Familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

Étudier la liberté de la famille $\overrightarrow{u} = (5-m,-1,1)$, $\overrightarrow{v} = (-3,5-m,-1)$ et $\overrightarrow{w} = (-9,5,-1-m)$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{v_2} = (-1,-2,0), \quad \overrightarrow{v_3} = (0,1,0), \quad ,\overrightarrow{v_4} = (2,3,-1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_5} = (1,1,1).$$

Montrer que la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5})$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ et en extraire une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$E : x+2y+3z=0 \quad \text{et} \quad F : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& r \\ y &=& r+s \\ z &=& s \end{array}\right. ,\ (r,s) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer une base de E, une base de F et une base de $E \cap F$.

Exercice 4

On considère les sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{C}^4$ définis par :

$$E : \left\{\begin{array}{lcl} x &=& r \\ y &=& r+s \\ z &=& r+s \\ t &=& s \end{array}\right. ,\ (r,s) \in \mathbb{C}^2 \quad \text{et} \quad F : \left\{\begin{array}{ccccccccccc} x &+& iy &-& z &-& it &=& 0 \\ x &-& y &-& z &+& t &=& 0 \end{array}\right. .$$

Déterminer une base de E, une base de F et une base de $E \cap F$. Puis montrer que la famille formée par les vecteurs de la base de E et les vecteurs de la base de F est une base de $\mathbb{C}^4$.

Exercice 5

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'ensemble E_m des vecteurs $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x &+& y &+& z &-& t &=& 0 \\ x &-& y &+& z &+& t &=& 0 \\ x &+& 2y && &-& mt &=& 0 \end{array}\right. .$$

Démontrer que E_m est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

Pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la famille formée par $\overrightarrow{u_1} = (\lambda,\lambda,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,\lambda,1)$ et $\overrightarrow{u_1} = (2,1,1)$ est-elle libre ? Pour quelles valeurs est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7

Soient E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1,-1,1,-1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1,-1,3,-3)$, $\overrightarrow{u_3} = (2,-2,4,-4)$ et $\overrightarrow{u_4} = (3,-3,7,-7)$.

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Déterminer une représentation cartésienne de E.
3. Montrer que $E \subset F$ où F est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{w_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{w_2} = (0,0,1,-1)$, $\overrightarrow{w_3} = (1,0,1,-1)$ et $\overrightarrow{w_4} = (0,1,2,-2)$.