Corrigé de la feuille de TD n° 23

Familles de vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

La famille est libre si et seulement si $m \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4\}$.

Exercice 2

Par exemple $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ extraite de la famille génératrice $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5})$.

Exercice 3

Par exemple les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-3, 0, 1)$ forment une base de E, les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_4} = (0, 1, 1)$ une base de F et le vecteur $\overrightarrow{v_5} = (5, 2, -3)$ une base de $E \cap F$.

Exercice 4

Par exemple les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (0, 1, 1, 1)$ forment une base de E, les vecteurs $\overrightarrow{v_3} = (1, 0, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_4} = (0, 1, 0, 1)$ une base de F. Puisque $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$, une base de $E \cap F$ ne contient aucun vecteur, la seule base de $E \cap F$ est donc la famille vide $\emptyset$.

Exercice 5

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ alors le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (-2, 1, 3, 0)$ forme une base de E_m. Sinon $m = 2$ et alors les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (-2, 1, 3, 0)$ et $\overrightarrow{v_1} = (0, 1, 0, 1)$ forment une base de E_2.

Exercice 6

La famille est libre si et seulement si $\lambda \neq 1$, et dans ce cas c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7

1. $\dim(E) = 2$ et par exemple $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ forme une base de E.
2. Par exemple :

$$E : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 0 \\ z + t & = & 0 \end{array} \right.$$

3. Car $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{w_1} + 3\overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{w_4}$ et $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{w_1} + 5\overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{w_4}$.