Feuille de TD n° 24

Développements limités

Exercice 1

Calculer les développements limités suivants :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{DL}_5(0) \text{ de } f_1 : x \mapsto \frac{\sin^2(x)}{e^x - e^{-x}}\\
&\mathrm{DL}_3(1) \text{ de } f_2 : x \mapsto 42^x\\
&\mathrm{DL}_5(0) \text{ de } f_3 : x \mapsto \ln(1 + x\cos(x))\\
&\mathrm{DL}_3(1) \text{ de } f_4 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{x}}\\
&\mathrm{DL}_2\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ de } f_5 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2 - x - 2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $\mathcal{D}_f$ de f et montrer que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f)$.
2. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$.
3. En déduire un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f pour tout ordre $n \in \mathbb{N}$.
4. Retrouver le résultat précédent à l'aide de la formule de Taylor-Young.

Exercice 3

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités :

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \ln(1+x)}{x^2}$;
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1 - \cos(x))}$;
4. $\lim_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{2}{\cos^2(x)} + \dfrac{1}{\ln(\sin(x))}\right)$;
5. $\lim_{n\to +\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n$.

Exercice 4

Etudier les tangentes des fonctions suivantes aux points donnés et leurs positions par rapport à la courbe représentative de la fonction correspondante :

$$\begin{aligned}
f_1 &: x \mapsto \frac{\ln(1+x) - \ln(2)}{\sin(x-1)} \text{ en } x = 1\\
f_2 &: x \mapsto \frac{1 - \sqrt{2 - 2x + x^2}}{x - 1} \text{ en } x = 1\\
f_3 &: x \mapsto \sqrt[42]{1 - x^2 - x^4} \text{ en } x = 0
\end{aligned}$$

Exercice 5

Etudier les asymptotes des fonctions suivantes et leurs positions par rapport à la courbe représentative de la fonction correspondante :

$$\begin{aligned}
f_1 &: x \mapsto \frac{\sqrt{1 + x^4 + x^6}}{1 + x^2}\\
f_2 &: x \mapsto x^2 \arctan\left(\frac{3x - 1}{3(x^2 + x + 1)}\right)\\
f_3 &: x \mapsto x\exp\left(\frac{x-1}{x+1}\right)
\end{aligned}$$