# Corrigé de la feuille de TD n° 24

# Développements limités

## Exercice 1

$$f_1(x) = \frac{\sin^2(x)}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^3 + \frac{43}{720}x^5 + o_{x\to 0}(x^5)$$

$$f_2(x) = 42^x = 42 + 42\ln(42)(x-1) + 21\ln(42)^2(x-1)^2 + 7\ln(42)^3(x-1)^3 + o_{x\to 1}\left((x-1)^3\right)$$

$$f_3(x) = \ln(1 + x\cos(x)) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{31}{120}x^5 + o_{x\to 0}(x^5)$$

$$f_4(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}} = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + \frac{55\sqrt{2}}{1024}(x-1)^3 + o_{x\to 1}\left((x-1)^3\right)$$

$$f_5(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{2}{\pi}+1\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{6}{\pi^2} + \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + o_{x\to\pi/4}\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2\right)$$

## Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x^2-x-2} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)}$.

1. $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -1[\cup]-1, 2[\cup]2, +\infty[$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}_f)$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
2. Par identification : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$ avec $(a,b) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
3. On a :

$$\begin{cases} \frac{1}{x+1} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x\to 0}(x^n) \\ \frac{1}{x-2} &= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}x^n + o_{x\to 0}(x^n) \end{cases}$$

donc :

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x^2 - \frac{11}{16}x^3 + \cdots + \left(\frac{2\times(-1)^n}{3} - \frac{1}{3\times 2^{n+1}}\right)x^n + o_{x\to 0}(x^n).$$

4. Pour $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x-2}$, on a par récurrence :

$$\forall k \geqslant 0,\ \frac{d^n f_1}{dx^n}(0) = \frac{(-1)^n n!}{(0+1)^{n+1}} = (-1)^n n! \quad \text{et} \quad \frac{d^n f_2}{dx^n}(0) = \frac{(-1)^n n!}{(0-2)^{n+1}} = -\frac{n!}{2^{n+1}}$$

donc, d'après la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2\times(-1)^k}{3} - \frac{1}{3\times 2^{k+1}}\right)x^k + o_{x\to 0}(x^n).$$

## Exercice 3

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \dfrac{1}{6}$ ;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) - \ln(1+x)}{x^2} = \dfrac{1}{4}$ ;
3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \dfrac{2}{3}$ ;
4. $\lim_{x\to\pi/2} \left(\dfrac{2}{\cos^2(x)} + \dfrac{1}{\ln(\sin(x))}\right) = 1$ ;
5. $\lim_{n\to+\infty} \left(3\sqrt[n]{2} - 2\sqrt[n]{3}\right)^n = \dfrac{8}{9}$.

## Exercice 4

1. $f_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + o_{x\to 1}((x-1)^2)$ donc la courbe représentative de $f_1$ est au-dessus de la tangente d'équation $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x-1)$ au voisinage de $x = 1$.
2. $f_2(x) = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^3 + o_{x\to 1}((x-1)^3)$ donc la courbe représentative de $f_2$ admet un point d'inflexion en $x = 1$ (et traverse la tangente d'équation $y = -\frac{1}{2}(x-1)$).
3. $f_3(x) = 1 - \frac{1}{42}x^2 + o_{x\to 0}(x^2)$ donc la courbe représentative de $f_3$ est au-dessous de la tangente d'équation $y = 1$ au voisinage de $x = 0$.

## Exercice 5

1. $xf_1\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x\to 0^+}(x^2)$ donc la courbe représentative de $f_1$ est au-dessous de l'asymptote d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$, et par parité la courbe représentative de $f_1$ est au-dessous de l'asymptote d'équation $y = -x$ au voisinage de $-\infty$.
2. $xf_2\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}x^3 + o_{x\to 0^+}(x^3)$ donc la courbe représentative de $f_2$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = -\frac{4}{3} + x$ au voisinage de $+\infty$, de même on a $-xf_2\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}x^3 + o_{x\to 0^+}(x^3)$ donc la courbe représentative de $f_2$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = -\frac{4}{3} + x$ au voisinage de $-\infty$.
3. $xf_3\left(\frac{1}{x}\right) = e - 2ex + 4ex^2 + o_{x\to 0^+}(x^2)$ donc la courbe représentative de $f_3$ est au-dessus de l'asymptote d'équation $y = -2e + ex$ au voisinage de $+\infty$, de même on a $-xf_3\left(-\frac{1}{x}\right) = e + 2ex + 4ex^2 + o_{x\to 0^+}(x^2)$ donc la courbe représentative de $f_3$ est au-dessous de l'asymptote d'équation $y = -2e + ex$ au voisinage de $-\infty$.