# Feuille de TD n$^o$ 25

# Variables aléatoires sur un univers fini

## Exercice 1

On considère un mobile ponctuel qui se déplace aléatoirement sur un axe gradué. A l'instant $n = 0$, le mobile est situé à l'origine $X_0 = 0$. Puis, à chaque instant $n \in \mathbb{N}$, son abscisse $X_n \in \mathbb{Z}$ se déplace d'un pas vers la droite, c'est-à-dire $X_{n+1} = X_n + 1$, avec probabilité $p \in [0,1]$ et se déplace d'un pas vers la gauche, c'est-à-dire $X_{n+1} = X_n - 1$, avec probabilité $q = 1 - p$. On note $D_n$ le nombre de pas vers la droite effectués par le mobile jusqu'à l'instant $n$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $D_n$.
2. Exprimer $X_n$ en fonction de $D_n$ et de $n$.
3. Déterminer l'ensemble $X_n(\Omega)$ des valeurs possibles de $X_n$.
4. En déduire la loi de probabilité, l'espérance et la variance de $X_n$.
5. Déterminer les valeurs de $p \in [0,1]$ pour lesquelles $X_n$ est centrée. Interpréter ce résultat.

## Exercice 2

On tire 8 cartes dans un jeu de 32 cartes classiques et on gagne 10€ pour chaque as tiré. On note $X$ le nombre d'as tirés.

1. On suppose que les tirages sont faits avec remise. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de $X$. Pour quelle mise le jeu rapporte-t-il en moyenne 1€ à l'organisateur.
2. Mêmes questions dans le cas où les tirages sont faits sans remise.

## Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Un archer tire $n$ flèches dont chacune a la même probabilité $p \in [0,1]$ de toucher la cible. On note $X$ le numéro de la première flèche qui touche la cible et on note $(X = 0)$ l'événement qu'aucune flèche de l'archer ne touche la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité et l'espérance de $X$.
2. Calculer la probabilité que l'archer touche la cible à la première flèche sachant qu'au moins une de ses $n$ flèches touche la cible.

## Exercice 4

On considère une urne contenant $n$ boules numérotées de 1 à $n$ où $n \geqslant 1$ est une entier fixé. On effectue deux tirages avec remise dont on note $X_1$ et $X_2$ les numéros tirés. On pose enfin $M = \max\{X_1, X_2\}$ et $m = \min\{X_1, X_2\}$

1. Calculer l'espérance de $M$ et l'espérance de $m$.
2. (a) Déterminer les fonctions de répartition de $X_1$ et $X_2$.
   (b) Pour tout entier $k$, exprimer l'événement $(M \leqslant k)$ en fonction des événements $(X_1 \leqslant k)$ et $(X_2 \leqslant k)$.
   (c) En déduire la fonction de répartition de $M$.
   (d) Déterminer la loi de $M$.
   (e) Retrouver l'espérance de $M$.
3. Reprendre l'étude de la question précédente pour la variable aléatoire $m$.
4. En comparant $X_1 + X_2$ et $M + m$, retrouver $E(m)$ à partir de $E(M)$.
5. Calculer l'espérance de $Mm$.
6. En déduire que $M$ et $m$ ne sont pas indépendantes.

## Exercice 5

On considère deux urnes $\mathcal{U}^1$ et $\mathcal{U}^2$ contenant chacune 3 boules parmi 6 : 3 rouges et 3 vertes. On répète successivement l'expérience suivante : on tire une boule de $\mathcal{U}_1$ et une boule de $\mathcal{U}_2$, puis on les échange avant de les remettre dans les urnes (c'est-à-dire que chaque boule tirée est remise dans l'urne où elle n'a pas été tirée). Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n^1$ le nombre de boules rouges dans l'urne $\mathcal{U}^1$ après la $n$-ième expérience. On note :

$$M = \left(P_{R_0^1 = j-1}(R_1^1 = i-1)\right)_{(i,j)\in[\![1,4]\!]^2} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \begin{pmatrix} P(R_n^1 = 0) \\ P(R_n^1 = 1) \\ P(R_n^1 = 2) \\ P(R_n^1 = 3) \end{pmatrix}.$$

1. (a) Déterminer les coefficients de la matrice $M$.
   (b) Montrer que $M$ est inversible.
   (c) Calculer l'inverse de $M$.
2. Montrer que $X_{n+1} = MX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Dans cette question (et seulement dans cette question), on suppose que $R_0^1$ suit la loi uniforme sur $[\![0,3]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de $R_0^1$ sachant $R_1^1 = 1$.
4. Soient $L = (0\ 1\ 2\ 3)$ et $J = (1\ 1\ 1\ 1)$ deux matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $LM = \alpha L + \beta J$.
   (b) En déduire une expression de $E(R_{n+1}^1)$ en fonction de $E(R_n^1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire une expression de $E(R_n^1)$ en fonction de $E(R_0^1)$ et $n \in \mathbb{N}$.