Corrigé de la feuille de TD n° 25

Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 1

1. La direction du mouvement du mobile à chaque instant est déterminée à l'aide d'une expérience de Bernoulli. Ainsi, le nombre de pas vers la droite D_n jusqu'à l'instant n correspond à un schéma de Bernoulli et donc $D_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.
2. On note G_n le nombre de pas vers la gauche effectués jusqu'à l'instant n. Alors $D_n+G_n = n \Leftrightarrow G_n = n-D_n$ et donc $X_n = D_n-G_n = D_n-(n-D_n) = 2D_n-n$.
3. On a $D_n = \{0,1,\dots,n\}$ donc :

$$\begin{aligned} X_n(\Omega) &= \{-n,-n+2,\dots,n-2,n\} \\ &= \{k \in \mathbb{Z} \,/\, -n \leqslant k \leqslant n \text{ avec } k \text{ et } n \text{ de même parité}\}. \end{aligned}$$

4. Soit $k \in X_n(\Omega)$. Alors :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P(2D_n - n = k) = P\left(D_n = \frac{k+n}{2}\right) \\ &= \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{n-\frac{n+k}{2}} = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}} q^{\frac{n-k}{2}} \end{aligned}$$

ce qui est cohérent car $\frac{n+k}{2} \in \{0,1,\dots,n\}$. De plus :

$$E(X_n) = E(2D_n-n) = 2E(D_n)-n = 2np-n = n(2p-1)$$

$$\text{et} \quad V(X_n) = V(2D_n-n) = 4V(D_n) = 4npq.$$

5. X_n centrée $\Leftrightarrow E(X_n) = 0 \Leftrightarrow n(2p-1) = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2}$. Ainsi l'abscisse du mobile est centrée si et seulement si le mobile se déplace à gauche ou à droite avec la même probabilité.

Exercice 2

1. Si les tirages sont faits avec remise alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(8, \frac{4}{32}\right)$. Donc $P(X=k) = \binom{8}{k}\left(\frac{4}{32}\right)^k\left(\frac{32-4}{32}\right)^{8-k} = \binom{8}{k}\frac{4^k \times 28^{n-k}}{32^n}$ et $E(X) = 8 \times \frac{4}{32} = 1$. Si la mise est de $m \in \mathbb{R}$, le gain moyen de l'organisateur est donné par $E(m-10X) = m-10E(X) = m-10$. Le jeu rapporte donc en moyenne 1€ à l'organisateur pour une mise de 11€.
2. Si les tirages sont faits sans remise alors :

$$P(X=0) = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}}, \quad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{7}}{\binom{32}{8}}, \quad P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{6}}{\binom{32}{8}},$$

$$P(X=3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{5}}{\binom{32}{8}} \text{et} \quad P(X=4) = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{32}{8}}$$

On obtient d'après la formule de Vandermonde :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\binom{4}{k}\binom{28}{8-k}}{\binom{32}{8}} = \frac{\binom{4+28}{8}}{\binom{32}{8}} = 1.$$

On retrouve donc la même conclusion que pour les tirages avec remise : si la mise est de $m \in \mathbb{R}$, le gain moyen de l'organisateur est donné par $E(m-10X) = m-10E(X) = m-10$ et le jeu rapporte en moyenne 1€ à l'organisateur pour une mise de 11€.

Exercice 3

1. L'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs possibles de X est $\{0,1,\dots,n\}$. Pour tout $k \in \{1,2,\dots,n\}$, on note F_k l'événement «la k-ième flèche touche la cible». Alors :

$$(X=k) = \overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_{k-1}} \cap F_k$$

et d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} & P(X=k) \\ =& P\left(\overline{F_1}\right) \times P_{\overline{F_1}}\left(\overline{F_2}\right) \times \dots \times P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\dots\cap\overline{F_{k-2}}}\left(\overline{F_{k-1}}\right) \times P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\dots\cap\overline{F_{k-1}}}\left(F_k\right) \\ =& (1-p)(1-p)\dots(1-p)p = q^{k-1}p \quad \text{avec } q = 1-p. \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} & P(X=0) \\ =& P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \dots \cap \overline{F_{k-1}} \cap \overline{F_k}\right) \\ =& P\left(\overline{F_1}\right) \times P_{\overline{F_1}}\left(\overline{F_2}\right) \times \dots \times P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\dots\cap\overline{F_{k-2}}}\left(\overline{F_{k-1}}\right) \times P_{\overline{F_1}\cap\overline{F_2}\cap\dots\cap\overline{F_{k-1}}}\left(\overline{F_k}\right) \\ =& (1-p)(1-p)\dots(1-p)(1-p) = q^n. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = 0 \times q^n + \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dq}\left(q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=1}^{n} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k\right) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \\
&= p\left(\frac{-(n+1)q^n(1-q)-(1-q^{n+1})(-1)}{(1-q)^2}\right) \\
&= p\frac{(n+1)q^{n+1}-(n+1)q^n+1-q^{n+1}}{p^2} \\
&= \frac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{p}.
\end{aligned}$$

2. La probabilité que l'archer touche la cible à la première flèche sachant qu'au moins une de ses n flèches touche la cible est donnée par :

$$P_{X\neq 0}(X=1) = \frac{P((X\neq 0)\cap(X=1))}{P(X\neq 0)} = \frac{P(X=1)}{1-P(X=0)} = \frac{p}{1-q^n}.$$

Exercice 4

1. D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
E(M) &= \sum_{(k_1,k_2)\in[\![1,n]\!]^2} \max\{k_1,k_2\}P((X_1=k_1)\cap(X_2=k_2)) \\
&= \sum_{k_1=1}^{n}\left(\sum_{k_2=1}^{k_1}\frac{k_1}{n^2} + \sum_{k_2=k_1+1}^{n}\frac{k_2}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\left(k_1^2 + \frac{(n-k_1)(n+k_1+1)}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2n^2}\sum_{k_1=1}^{n}\left(k_1^2 - k_1 + n(n+1)\right) \\
&= \frac{1}{2n^2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} + n^2(n+1)\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}.
\end{aligned}$$

De même :

$$E(m) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}.$$

2. (a)

$$\forall t\in\mathbb{R},\ P(X_1\leqslant t) = P(X_2\leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ \lfloor t\rfloor/n & \text{si } t\in[1,n[\\ 1 & \text{si } t\geqslant n \end{cases}.$$

(b) $\forall k\in\mathbb{Z},\ (M\leqslant k) = (X_1\leqslant k)\cap(X_2\leqslant k)$.

(c) Par indépendance :

$$\forall t\in\mathbb{R},\ P(M\leqslant t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ (\lfloor t\rfloor/n)^2 & \text{si } t\in[1,n[\\ 1 & \text{si } t\geqslant n \end{cases}.$$

(d) $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(M=k) = P((M\leqslant k)\setminus(M\leqslant k-1)) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$.

(e) $E(M) = \sum_{k=1^n} k\left(\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2\right) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

3. $\forall k\in\mathbb{Z},\ (m\leqslant k) = (X_1\leqslant k)\cup(X_2\leqslant k)$. D'où, par indépendance :

$$\begin{aligned}
\forall t\in\mathbb{R},\ P(m\leqslant t) &= 1-P(m>t) \\
&= 1-P((X_1>t)\cap(X_2>t)) \\
&= 1-\begin{cases} 1 & \text{si } t<1 \\ (1-\lfloor t\rfloor/n)^2 & \text{si } t\in[1,n[\\ 0 & \text{si } t\geqslant n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } t<1 \\ 1-(1-\lfloor t\rfloor/n)^2 & \text{si } t\in[1,n[\\ 1 & \text{si } t\geqslant n \end{cases}.
\end{aligned}$$

Donc $\forall k\in[\![1,n]\!],\ P(m=k) = P((m\leqslant k)\setminus(m\leqslant k-1)) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2$ et $E(m) = \sum_{k=1^n} k\left(\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^2\right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

4. $X_1+X_2 = M+m$ d'où par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(m) &= E(X_1+X_2-M) \\
&= E(X_1)+E(X_2)-E(M) \\
&= \frac{n+1}{2}+\frac{n+1}{2}-\frac{(n+1)(4n-1)}{6n} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}
\end{aligned}$$

car X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $[\![1,n]\!]$.

5. $E(Mm) = E(X_1X_2) = \sum_{(k_1,k_2)\in[\![1,n]\!]^2}\frac{k_1k_2}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{4}$.

6. $E(Mm)-E(M)E(m) = \frac{(n-1)^2(n+1)^2}{36n^2} \neq 0$ (si $n\neq 1$) donc M et m ne sont pas indépendantes.

Exercice 5

1. (a)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1\\ 0 & 0 & 1/9 & 0\end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(M) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1\\ 0 & 0 & 1/9 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2\\ L_2 \leftrightarrow L_1\\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4/9 & 1\\ 0 & 0 & 1/9 & 0\end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4/9 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4}\end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - \tfrac{1}{4}L_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -4 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}\\
&= 4.
\end{aligned}$$

Donc $M \in \mathcal{G}\ell_4(\mathbb{R})$.

(c) En reprenant les calculs précédents :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4/9 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_4\\ L_4 \leftarrow -4L_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\\ -4 & 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2 - L_3\\ L_2 \leftarrow 9L_2\\ L_3 \leftarrow \frac{9}{4}L_3\\ \\ \end{array} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -4\\ 9 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9\\ -4 & 0 & 1 & -4\end{pmatrix} = M^{-1}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales, on a pour tout $i \in [\![1,4]\!]$:

$$\begin{aligned}
(X_{n+1})_{i,1} = P(R^1_{n+1} = i-1) &= \sum_{j=1}^{4} \underbrace{P_{R^1_n = j-1}(R^1_{n+1} = i-1)}_{=P_{R^1_0=j-1}(R^1_1=i-1)} \times P(R^1_n = j-1)\\
&= \sum_{j=1}^{4} M_{i,j} \times (X_n)_{j,1}
\end{aligned}$$

donc $X_{n+1} = MX_n$.

3. D'après la formule de Bayes, on a pour tout $k \in [\![0,3]\!]$:

$$\begin{aligned}
P_{R^1_1=1}(R^1_0 = k) &= \frac{P_{R^1_0=k}(R^1_1 = 1) \times P(R^1_0 = k)}{\sum_{j=1}^{4} P_{R^1_0=j-1}(R^1_1 = 1) \times P(R^1_0 = j-1)}\\
&= \frac{P_{R^1_0=k}(R^1_1 = 1) \times \frac{1}{4}}{1 \times \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4}}\\
&= \frac{9}{17} P_{R^1_0=k}(R^1_1 = 1) = \begin{cases} 9/17 & \text{si} \quad k = 0\\ 4/17 & \text{si} \quad k \in \{1,2\}\\ 0 & \text{si} \quad k = 3 \end{cases}.
\end{aligned}$$

4. (a)

$$LM = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/9 & 0 & 0\\ 1 & 4/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1\\ 0 & 0 & 1/9 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $LM = \alpha L + \beta J$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 4/3\\ 5/3\\ 2\end{pmatrix}\\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1/3\\ 2/3\\ 1\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}\\
\iff & \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1/3\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}
\end{aligned}$$

d'où une unique solution $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{3}, 1)$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
E(R_{n+1}^1) &= \sum_{k=0}^{3} kP(R_{n+1}^1 = k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(R_{n+1}^1 = 0) \\ P(R_{n+1}^1 = 1) \\ P(R_{n+1}^1 = 2) \\ P(R_{n+1}^1 = 3) \end{pmatrix} \\
&= LX_{n+1} = LMX_n = \left(\frac{1}{3}L + J\right) X_n = \frac{1}{3}LX_n + JX_n \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{3} kP(R_n^1 = k) + \sum_{k=0}^{3} P(R_{n+1}^1 = k) \\
&= \frac{1}{3}E(R_n^1) + 1.
\end{aligned}$$

(c) En reconnaissant une suite arithmético-géométrique, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ E(R_n^1) = \frac{3}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(E(R_0^1) - \frac{3}{2}\right).$$