Feuille de TD n° 26

Intégration sur un segment

Exercice 1

On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{4}{\cos(t)\sin^3(t)}dt$.

1. Déterminer $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\},\ \frac{4}{x(1-x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+1} + \frac{e}{(x+1)^2}.$$

2. En déduire la valeur de I à l'aide du changement de variable $x = \cos(t)$.

Exercice 2

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$.
2. Etudier la parité de F sur $\mathbb{R}^\star$.
3. Calculer F' sur $\mathbb{R}^\star$ et étudier les variations de F.
4. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = 0$.
5. Justifier que $\int_x^{2x} o_{t\to 0}(t)dt = o_{x\to 0}(x^2)$ et en déduire que F se prolonge par continuité en 0.
6. Le prolongement continu de F est-il de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. En considérant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$ où $k \in \mathbb{N}^\star$, montrer que $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
2. Démontrer que $\forall n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.
3. En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et en particulier que $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$ et $W'_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

1. Déterminer une relation entre W_n et W'_n à l'aide du changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t$.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, puis qu'elle est convergente.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
4. En déduire que $\forall p \geqslant 0,\ W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt$. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
2. En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3. En s'inspirant des questions précédentes, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt$.