Corrigé de la feuille de TD n° 26

Intégration sur un segment

Exercice 1

On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{\cos(t)\sin^3(t)}dt$.

1. Pour tout $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{(x+1)^2}\\
=&\Big[a(x-1)^2(x+1)^2+bx(x-1)(x+1)^2+cx(x+1)^2\\
&\qquad+dx(x-1)^2(x+1)+ex(x-1)^2\Big]/\Big[x(x-1)^2(x+1)^2\Big]\\
=&\Big[ax^4-2ax^2+a+bx^4+bx^3-bx^2-bx+cx^3+2cx^2+cx\\
&\qquad+dx^4-dx^3-dx^2+dx+ex^3-2ex^2+ex\Big]/\Big[x(1-x^2)^2\Big]\\
=&\Big[(a+b+d)x^4+(b+c-d+e)x^3+(-2a-b+2c-d-2e)x^2\\
&\qquad+(-b+c+d+e)x+a\Big]/\Big[x(1-x^2)^2\Big]\\
=&\frac{P(x)}{x(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

où P est un polynôme de degré 4. Par identification des coefficients, ce polynôme est constant égal à 4 si et seulement si $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ vérifient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
a+b+d&=&0\\
b+c-d+e&=&0\\
-2a-b+2c-d-2e&=&0\\
-b+c+d+e&=&0\\
a&=&4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}
a&=&4&L_1\leftrightarrow L_5\\
b+c-d+e&=&0&\\
-b+2c-d-2e&=&8&L_3\leftarrow L_3+2L_5\\
-b+c+d+e&=&0&\\
b+d&=&-4&L_5\leftarrow L_1-L_5
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}
a&=&4&\\
b+c-d+e&=&0&\\
3c-2d-e&=&8&L_3\leftarrow L_3+L_2\\
2c+2e&=&0&L_4\leftarrow L_4+L_2\\
-c+2d-e&=&-4&L_5\leftarrow L_5-L_2
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}
a&=&4&\\
b+c-d+e&=&0&\\
c-2d+e&=&4&L_3\leftrightarrow -L_5\\
4d&=&-8&L_4\leftarrow L_4+2L_5\\
4d-4e&=&-4&L_5\leftarrow L_3+3L_5
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcll}
a&=&4&\\
b+c-d+e&=&0&\\
c-2d+e&=&4&\\
4d&=&-8&\\
-4e&=&4&L_5\leftarrow L_5-L_4
\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl}
a&=&4\\
b&=&-c+d-e=-2\\
c&=&4+2d-e=1\\
d&=&-2\\
e&=&-1
\end{array}\right..$$

On en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\},\ \frac{4}{x(1-x^2)^2}=\frac{4}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

2. Le changement de variable $x=\cos(t)$ donne $\frac{dx}{dt}=-\sin(t)\Leftrightarrow\sin(t)dt=-dx$, donc :

$$\begin{aligned}
I&=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{\cos(t)\sin^3(t)}dt=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{\cos(t)\sin^4(t)}\sin(t)dt\\
&=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{\cos(t)(\sin^2(t))^2}\sin(t)dt=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{4}{\cos(t)(1-\cos^2(t))^2}\sin(t)dt\\
&=\int_{\sqrt{3}/2}^{1/2}\frac{4}{x(1-x^2)^2}(-dx)=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{4}{x(1-x^2)^2}dx\\
&=\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2}\left(\frac{4}{x}-\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx\\
&=\Big[4\ln|x|-2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}\Big]_{1/2}^{\sqrt{3}/2}
\end{aligned}$$

$$=4\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}-2\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+1\right)+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}$$
$$-4\ln\left(\frac{1}{2}\right)+2\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+2\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{\frac{1}{2}+1}$$
$$=2\ln(3)-4\ln(2)-2\ln\left((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right)+4\ln(2)+\frac{2(2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$
$$+4\ln(2)-2\ln(2)-2+2\ln(3)-2\ln(2)-\frac{2}{3}$$
$$=2\ln(3)-2\ln(1)+8+2\ln(3)-\frac{8}{3}=4\ln(3)+\frac{16}{3}.$$

Exercice 2

On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt$.

1. Puisque la fonction $g : t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^\star$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur est non nul, g admet des primitives sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty$. On note G_1 une primitive de g sur $]-\infty, 0[$ et G_2 une primitive de g sur $]0, +\infty[$. Par définition, G_1 et G_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur intervalle de définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, on a :
   1^er^ cas : $x < 0$, donc $[2x, x] \subset]-\infty, 0[$ et $F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt = G_1(2x) - G_1(x)$;
   2^e^ cas : $x > 0$, donc $[x, 2x] \subset]0, +\infty[$ et $F(x) = \int_x^{2x} g(t)dt = G_2(2x) - G_2(x)$.
   Dans tous les cas, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ comme somme et composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
2. F est définie sur $\mathbb{R}^\star =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ qui est symétrique par rapport à l'origine. De plus, on a à l'aide du changement de variable $t = -s$ (donc $dt = -ds$) :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ F(-x) &= \int_{-x}^{-2x} \frac{\cos(t)}{t}dt\\ &= \int_x^{2x} \frac{\cos(-s)}{-s}(-ds)\\ &= \int_x^{2x} \frac{\cos(s)}{s}ds\\ &= F(x).\end{aligned}$$
   Donc la fonction F est paire sur $\mathbb{R}^\star$.
3. Pour tout $x > 0$ on a $F(x) = G_2(2x) - G_2(x)$, donc :
$$\begin{aligned}F'(x) &= 2G_2'(2x) - G_2'(x) = 2g(2x) - g(x) = 2\frac{\cos(2x)}{2x} - \frac{\cos(x)}{x}\\ &= \frac{\cos(2x)-\cos(x)}{x} = \frac{2\cos^2(x)-1-\cos(x)}{x} = \frac{(\cos(x)-1)(2\cos(x)+1)}{x}.\end{aligned}$$
   On obtient une expression identique pour $x < 0$ car :
$$F'(x) = 2G_1'(2x) - G_1'(x) = 2g(2x) - g(x) = \cdots = \frac{(\cos(x)-1)(2\cos(x)+1)}{x}.$$
   De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$:
$$\cos(x) - 1 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\cos(x) + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geqslant -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right].$$
   On en déduit les variations de F :

x	$\cdots$		$-\frac{6\pi}{3}$		$-\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{3}$		$-\frac{6\pi}{3}$		$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘		↗		↘		↗	‖	↘		↗		↘		↗	

4. Soit $x > 0$. On a en utilisant une intégration par parties :
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt\\ &= \left[\frac{\sin(t)}{t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} -\frac{\sin(t)}{t^2}dt\\ &= \frac{\sin(2x)}{2x} - \frac{\sin(x)}{x} + \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt.\end{aligned}$$
   Or $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{sin(2x)}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ par encadrement. De plus :
$$-\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt = \int_x^{2x} \frac{-1}{t^2}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt$$
   par croissance de l'intégrale, et :
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$
   On en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t^2}dt = 0$ par encadrement et finalement :
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.$$
   De même, on montre que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ en utilisant la parité de F.

5. Soient $x > 0$ et h n'importe quelle fonction continue sur $[x, 2x]$ telle que $h(t) = o_{t\to 0}(t)$. On note H une primitive de h. Alors $H(t) = H(0) + o_{t\to 0}(t^2)$ par primitivation de développement limité et donc :

$$\begin{aligned}&\int_x^{2x} o_{t\to 0}(t)dt = \int_x^{2x} h(t)dt\\ =&H(2x) - H(x) = H(0) + o_{x\to 0}\left((2x)^2\right) - H(0) - o_{x\to 0}\left(x^2\right)\\ =&o_{x\to 0}\left(4x^2\right) - o_{x\to 0}\left(x^2\right) = o_{x\to 0}\left(x^2\right) - o_{x\to 0}\left(x^2\right) = o_{x\to 0}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

La preuve est identique si $x < 0$ (avec h une fonction continue sur $[2x, x]$). De plus on a :

$$\frac{\cos(t)}{t} = \frac{1 - \frac{t^2}{2} + o_{t\to 0}\left(t^2\right)}{t} = \frac{1}{t} - \frac{t}{2} + o_{t\to 0}(t).$$

On en déduit par linéaire de l'intégrale que pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$:

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}dt\\ &= \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt - \int_x^{2x} \frac{t}{2}dt + \int_x^{2x} o_{t\to 0}(t)dt\\ &= \Big[\ln|t|\Big]_x^{2x} - \left[\frac{t^2}{4}\right]_x^{2x} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\\ &= \ln|2x| - \ln|x| - \frac{(2x)^2}{4} + \frac{x^2}{4} + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\\ &= \ln\left|\frac{2x}{x}\right| - \frac{3}{4}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)\\ &= \ln(2) - \frac{3}{4}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

Ainsi, F admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. En particulier, F admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de 0 qui est donné par $F(x) = \ln(2) + o_{x\to 0}(1)$. Donc F se prolonge par continuité en 0 avec $F(0) = \ln(2)$.

6. Puisque F admet un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0, F admet en particulier un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 qui est donné par $F(x) = \ln(2) + o_{x\to 0}(x)$. Donc F est dérivable en 0 avec $F'(0) = 0$. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ F'(x) = \frac{(\cos(x) - 1)(2\cos(x) + 1)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-\frac{x^2}{2} \times 3}{x} = -\frac{3}{2}x$$

donc $\lim_{x\to 0} F'(x) = 0 = F'(0)$ ce qui justifie la continuité de F en 0. Finalement F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Puisque la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}.$$

Puis en utilisant la croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}&\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt &\leqslant& \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt &\leqslant& \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt\\ \Leftrightarrow\quad &\left[\frac{t}{k+1}\right]_k^{k+1} &\leqslant& \Big[\ln|t|\Big]_k^{k+1} &\leqslant& \left[\frac{t}{k}\right]_k^{k+1}\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{k+1-k}{k+1} &\leqslant& \ln|k+1| - \ln|k| &\leqslant& \frac{k+1-k}{k}\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{1}{k+1} &\leqslant& \ln(k+1) - \ln(k) &\leqslant& \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

2. En sommant l'inégalité $\frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$ pour k allant de 1 à $n \geqslant 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \sum_{k=1}^n \ln(k)\\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - \sum_{k=1}^n \ln(k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad H_n \geqslant \ln(n+1) + \sum_{k=2}^n \ln(k) - \sum_{k=2}^n \ln(k) - \ln(1) &= \ln(n+1) - \ln(1)\\ &= \ln(n+1).\end{aligned}$$

De même, en sommant l'inégalité $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k)$ pour k allant de 1 à $n-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \cdots = \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow\quad H_n - 1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(n).$$

Finalement, on a bien que $\forall n \geqslant 2,\ \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

3. Soit $n \geqslant 2$. D'après le résultat précédent, on a :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{1}{\ln(n)} + 1.$$

Or $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}$ et $\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln(n)}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ par encadrement. Par conséquent, $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et en particulier $\lim_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$ et $W'_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

1. Le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} - x$ donne :

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx = \int_{\pi/2-0}^{\pi/2-\pi/2} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right)(-dt) \\ &= -\int_{\pi/2}^{0} \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n\, dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = W'_n. \end{aligned}$$

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant \cos^{n+1}(x) \leqslant \cos^n(x)$$

puis en utilisant la croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} 0dx \quad &\leqslant \quad \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x)dx \quad \leqslant \quad \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx \\ \Leftrightarrow \quad 0 \quad &\leqslant \quad W_{n+1} \quad \leqslant \quad W_n. \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(W_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0. Par conséquent, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a par intégrations par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(x)\cos(x)dx \\ &= \left[\cos^{n+1}(x)\sin(x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (n+1)(-\sin(x))\cos^n(x)\sin(x)dx \\ &= 0 - 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\sin^2(x)dx \\ &= (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)(1-\cos^2(x))dx \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx - \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)dx\right) \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_{n+2} + W_{n+2} = (n+1)W_n \Leftrightarrow W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

4. Montrons par récurrence que $\forall p \geqslant 0,\ W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ et $W_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

Initialisation : On a pour $p = 0$:

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} \cos^0(x)dx = \int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2}\frac{\pi}{2}$$

et

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^1(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos(x)dx = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 = \frac{2^0(0!)^2}{(1)!}.$$

Hérédité : On suppose le résultat vrai pour un entier $p \geqslant 0$ fixé. En utilisant le résultat de la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} &= W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \left(\frac{2p+1}{2p+2}\right)\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{(2p+2)^2 2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^2(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2(p+1))!}{2^{2p+2}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)+1} &= W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} = \left(\frac{2p+2}{2p+3}\right)\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{(2p+2)^2 2^{2p}(p!)^2}{(2p+2)(2p+3)(2p+1)!} = \frac{2^2(p+1)^2 2^{2p}(p!)^2}{(2p+3)!} \\ &= \frac{2^{2p+2}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!} = \frac{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat pour tout $p \geqslant 0$ par récurence.

Exercice 5

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_a^b f(t)\cos(nt)dt$ et $J_n = \displaystyle\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt$.

1. Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, f' est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème des bornes, on en déduit que f' est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que :
$$\forall t \in [a,b],\ |f'(t)| \leqslant M.$$
Et puisque $|\sin| \leqslant 1$, on en déduit d'après l'inégalité triangulaire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$|J_n| = \left|\int_a^b f'(t)\sin(nt)dt\right| \leqslant \int_a^b |f'(t)\sin(nt)|\, dt = \int_a^b |f'(t)|\,|\sin(nt)|\, dt \leqslant \int_a^b M.1 dt = M(b-a).$$
Ainsi la suite $(J_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.
2. On a par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b f(t)\cos(nt)dt \\ &= \left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}dt \\ &= \frac{f(a)\sin(na) - f(b)\sin(nb)}{n} - \frac{1}{n}J_n. \end{aligned}$$
Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ (d'après l'inégalité triangulaire) :
$$\begin{aligned} |f(a)\sin(na) - f(b)\sin(nb)| &\leqslant |f(a)\sin(na)| + |f(b)\sin(nb)| \\ &= |f(a)|\,|\sin(na)| + |f(b)|\,|\sin(nb)| \\ &\leqslant |f(a)| + |f(b)| \end{aligned}$$
donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a)\sin(na)-f(b)\sin(nb)}{n} = 0$ par encadrement. De même $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}J_n = 0$ par encadrement car $(J_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. Finalement, on en déduit que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.
3. De même, à l'aide du théorème des bornes et de l'inégalité triangulaire, on peut montrer que la suite $\left(\int_a^b f'(t)\cos(nt)dt\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée, puis que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(nt)dt = 0$ par intégration par parties et limites par encadrement.