Feuille de TD n° 27

Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (2x - y, x + z)$.

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Discuter de l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f.
4. Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.
5. Déterminer la matrice de f relativement aux bases :

$$\mathcal{B}_1 = \Big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_2 = \Big((1,0),(1,1)\Big).$$

Exercice 2

Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \to \frac{1}{9}(8x + 2y - 2z, 2x + 5y + 4z, -2x + 4y + 5z)$.

1. Vérifier que p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer p^2.
3. Déterminer $\mathrm{rang}(p)$, $\dim(\mathrm{Im}(p))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(p))$.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$ et une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
5. Montrer que la réunion des deux bases trouvées à la question précédente forme une base de $\mathbb{R}^3$.
6. On note F l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$ tels que $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. Montrer que $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$, en déduire que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis démontrer que $F = \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 3 (Agro 2009)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A \quad \text{où} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. Diagonalisation de u.
   (a) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \mathrm{rang}(A - \lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 1\}$.
   (b) Déterminer les dimensions $\mathrm{Ker}(\mathrm{u} + 2\mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
   (c) Déterminer une base (f_1) de $\mathrm{Ker}(\mathrm{u} + 2\mathrm{Id})$ et une base $(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$ de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
   (d) Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.
2. Recherche des «racines carrées» de u.
   On suppose qu'il existe un endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v^2 = u$.
   (a) Montrer que u et v commutent, c'est-à-dire que $uv = vu$.
   (b) Montrer que $u(v(\mathrm{f}_1)) = -2v(\mathrm{f}_1)$ et en déduire que $\exists \mu \in \mathbb{R},\ v(\mathrm{f}_1) = \mu \mathrm{f}_1$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = x$.
      i. Montrer que $u(v(x)) = v(x)$ et en déduire que $v(x) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$.
      ii. En déduire que $\exists (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4,\ \begin{cases} v(\mathrm{f}_2) & = & \alpha \mathrm{f}_2 + \beta \mathrm{f}_3 \\ v(\mathrm{f}_3) & = & \gamma \mathrm{f}_2 + \delta \mathrm{f}_3 \end{cases}$.
   (d) Déterminer une expression de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$ à l'aide des résultats précédents.
   (e) Montrer que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et en déduire que $\mu^2 = -2$.
   (f) Conclure.