Corrigé de la feuille de TD n° 27

Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

Exercice 1

Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, (x,y,z)\mapsto(2x-y,x+z)$.

1. Soient (x,y,z) et (x',y',z') deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $(\lambda,\lambda')\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} f\Big(\lambda(x,y,z)+\lambda'(x',y',z')\Big) & = & f\Big(\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y',\lambda z+\lambda'z'\Big) \\ & = & \Big(2(\lambda x+\lambda'x')-(\lambda y+\lambda'y'),(\lambda x+\lambda'x')+(\lambda z+\lambda'z')\Big) \\ & = & \lambda\Big(2x-y,x+z\Big)+\lambda'\Big(2x'-y',x'+z'\Big) \\ & = & \lambda f\Big(x,y,z\Big)+\lambda' f\Big(x',y',z'\Big) \end{array}$$

donc f est bien une application linéaire.

2. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Im}(f) & = & \big\{(2x-y,x+z)\in\mathbb{R}^2 \,|\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big\} \\ & = & \big\{x(2,1)+y(-1,0)+z(0,1)\,|\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big\} \\ & = & \mathrm{Vect}\Big((2,1),(-1,0),(0,1)\Big) \\ & = & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

car $(2,1)$ et $(-1,0)$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathbb{R}^2$, donc ils forment une base de $\mathbb{R}^2$ et il suit que la famille $((2,1),(-1,0),(0,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$. Par conséquent on a d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(f))=\dim\left(\mathbb{R}^2\right)=2 \quad\text{et}\quad \dim(\mathrm{Ker}(f))=\dim\left(\mathbb{R}^3\right)-\dim(\mathrm{Im}(f))=3-2=1.$$

3. Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1\neq0$, il existe au moins un vecteur non nul dans $\mathrm{Ker}(f)$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f)\neq\{\overrightarrow{0}\}$, et donc f n'est pas injective. Mais f est surjective car $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^2$. Finalement, f est surjective et non injective, donc f n'est pas bijective.

4. On note $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, de même $\mathrm{f}_1=(1,0)$ et $\mathrm{f}_2=(0,1)$ ceux de la base canonique $\mathcal{C}'$ de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcccccl} f(e_1) & = & f(1,0,0) & = & (2,1) & = & 2\mathrm{f}_1+1\mathrm{f}_2 \\ f(e_2) & = & f(0,1,0) & = & (-1,0) & = & -1\mathrm{f}_1+0\mathrm{f}_2 \\ f(e_3) & = & f(0,0,1) & = & (0,1) & = & 0\mathrm{f}_1+1\mathrm{f}_2 \end{array}\right..$$

On en déduit donc la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. On note $\mathcal{B}=((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}'=((1,0),(1,1))$ une base de $\mathbb{R}^2$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcccl} f(1,0,0) & = & (2,1) & = & 1(1,0)+1(1,1) \\ f(1,1,0) & = & (1,1) & = & 0(1,0)+1(1,1) \\ f(1,1,1) & = & (1,2) & = & -1(1,0)+2(1,1) \end{array}\right..$$

donc :

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Soit $p:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3, (x,y,z)\to\frac{1}{9}(8x+2y-2z,2x+5y+4z,-2x+4y+5z)$.

1. On vérifie facilement que p est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donc p est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On a dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(p)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(p^2) & = & \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(p)^2 \\ & = & \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\times\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{81}\begin{pmatrix} 72 & 18 & -18 \\ 18 & 45 & 36 \\ -18 & 36 & 45 \end{pmatrix} \\ & = & \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ & = & \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(p) \end{array}$$

donc $p^2=p$.

3. On a à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{rang}(p) & = & \mathrm{rang}(\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(p)) & \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} & \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
& = & 2. &
\end{array}$$

Puis en utilisant le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Im}(p)) = \mathrm{rang}(p) = 2 \quad \text{et} \quad \dim(\mathrm{Ker}(p)) = \dim\left(\mathbb{R}^3\right) - \dim(\mathrm{Im}(p)) = 3-2 = 1.$$

4. En utilisant l' image par p de chaque vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left((8,2,-2),(2,5,4),(-2,4,5)\right).$$

Et puisque $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 2$, il suffit de considérer deux vecteurs non colinéaires de cette famille génératrice de $\mathrm{Im}(p)$ pour obtenir une base de $\mathrm{Im}(p)$, par exemple $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(p)} = ((8,2,-2),(2,5,4))$. Pour le noyau, puisque $\dim(\mathrm{Im}(p)) = 1$, n'importe quel vecteur non nul du noyau forme une base de $\mathrm{Ker}(p)$. Or en utilisant la matrice échelonnée de la question précédente, on a :

$$\begin{array}{rcl}
p(x,y,z) = (0,0,0) & \Leftrightarrow & \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & -18 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{5}{2}y - 2z = \frac{1}{2}z \\ y & = & -z \\ z & = & z \end{array}\right.
\end{array}$$

donc $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(p)} = ((1,-2,2))$ est par exemple une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

5. On considère la famille $\mathcal{B} = ((8,2,-2),(2,5,4),(1,-2,2))$ formée des vecteurs de $\mathcal{B}_{\mathrm{Im}(p)}$ et du vecteur de $\mathcal{B}_{\mathrm{Ker}(p)}$. Son rang est donné par :

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{rang}(\mathcal{B}) & = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} & \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 - 4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 0 & -18 & 9 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2 \end{array} \\
& = & 3. &
\end{array}$$

Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille de trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Soit $F = \{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3 \,|\, p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}\}$. Montrons que $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ par double inclusion.
   - Soit $\overrightarrow{u} \in F$ donc $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. On a $(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ car $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ par définition du noyau. Ainsi $F \subset \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
   - Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ donc $p(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u} = (p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. Ainsi $\overrightarrow{u} \in F$ et donc $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \subset F$.

   Finalement $F = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et donc F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ puisque le noyau de $p - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ qui est une application linéaire (par combinaison linéaire d'applications linéaires) est un sous-espace vectoriel. Enfin, montrons que $F = \mathrm{Im}(p)$ par double inclusion.
   - Soit $\overrightarrow{u} \in F$ donc $p(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. On a en particulier que $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$. Par définition de l'image, on a donc $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(p)$. Ainsi $F \subset \mathrm{Im}(p)$.
   - Soit $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}(p)$ donc $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{v})$ pour un certain vecteur $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$. Par conséquent $p(\overrightarrow{u}) = p(p(\overrightarrow{v})) = (p \circ p)(\overrightarrow{v}) = p^2(\overrightarrow{v})$. Or on a vu à la question 2 que $p^2 = p$, donc on a : $p(\overrightarrow{u}) = p^2(\overrightarrow{v}) = p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$. Ainsi $\overrightarrow{u} \in F$ et donc $\mathrm{Im}(p) \subset F$.

   Finalement $F = \mathrm{Im}(p)$.

Exercice 3 (Agro 2009)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A \quad \text{où} \quad A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. Diagonalisation de u.

(a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rang}(A-\lambda I_3) & = & \mathrm{rang}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1-2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 4 & -4 & -2-2\lambda \end{pmatrix} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 0 & 4\lambda-4\lambda^2 & 2-2\lambda \\ 0 & -8+8\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1-(1-2\lambda)L_2 \\ L_3 \leftarrow -4L_2 \end{array} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 0 & -4+4\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda(-4+4\lambda) & 2-2\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1-2\lambda & -1 \\ 0 & -4+4\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_3+\lambda L_2 \end{array}.
\end{array}$$

Ainsi $\mathrm{rang}(A-\lambda I_3) = 3$ si et seulement si $-4+4\lambda \neq 0$ et $2-\lambda-\lambda^2 \neq 0$. Or $-4+4\lambda = 4(\lambda-1)$ et $2-\lambda-\lambda^2 = -(\lambda+2)(\lambda-1)$ (par factorisation d'un polynôme de degré 2), donc $\mathrm{rang}(A-\lambda I_3) < 3 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2,1\}$.

(b) En reprenant le calcul de la question précédente, on a donc pour $\lambda = -2$ et $\lambda = 1$:

$$\mathrm{rang}(A+2I_3) = 2 \quad \text{et} \quad \mathrm{rang}(A-I_3) = 1.$$

On en déduit d'après le théorème du rang que :

$$\begin{array}{rcl}
\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})) & = & \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Im}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})) \\
& = & 3 - \mathrm{rang}\,(u+2\mathrm{Id}) \\
& = & 3 - \mathrm{rang}(A+2I_3) \\
& = & 3-2 \\
& = & 1
\end{array}$$

et de même $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{u}-\mathrm{Id})) = 3 - \mathrm{rang}(A-I_3) = 2$.

(c) Puisque $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})) = 1$, n'importe quel vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})$. Or en utilisant la matrice échelonnée de la question (a), on a :

$$\begin{array}{rcl}
(u+2\mathrm{Id})(x,y,z) = (0,0,0) & \Leftrightarrow & (A+2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -12 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5y+z = -\frac{1}{4}z \\ y & = & \frac{3}{12}z = \frac{1}{4}z \\ z & = & z \end{array}\right.
\end{array}$$

donc $\mathrm{f}_1 = (-1,1,4)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})$.
De même, on a :

$$\begin{array}{rcl}
(u-\mathrm{Id})(x,y,z) = (0,0,0) & \Leftrightarrow & (A-I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y+z \\ y & = & y \\ z & = & z \end{array}\right.
\end{array}$$

donc $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ est engendré par $\mathrm{f}_2 = (1,1,0)$ et $\mathrm{f}_3 = (1,0,1)$, et puisque ces deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment une base de $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$.

(d) Le rang de la famille $\mathcal{B}' = (\mathrm{f}_1,\mathrm{f}_2,\mathrm{f}_3)$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rang}(\mathcal{B}') & = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+4L_1 \end{array} \\
& = & \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \end{array} \\
& = & 3.
\end{array}$$

Ainsi $\mathcal{B}'$ est une famille de trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Puisque $\mathrm{f}_1 \in \mathrm{Ker}(\mathrm{u}+2\mathrm{Id})$, on a $u(\mathrm{f}_1)+2\mathrm{f}_1 = (u+2\mathrm{Id})(\mathrm{f}_1) = \overrightarrow{0}$ donc

$u(\mathrm{f}_1) = -2\mathrm{f}_1$. De même, puisque $\mathrm{f}_2 \in \mathrm{Ker(u - Id)}$ et $\mathrm{f}_3 \in \mathrm{Ker(u - Id)}$, on a $u(\mathrm{f}_2) = \mathrm{f}_2$ et $u(\mathrm{f}_3) = \mathrm{f}_3$. On en déduit que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Recherche des «racines carrées» de u.
   On suppose qu'il existe un endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v^2 = u$.
   (a) On a :
   $$uv = u \circ v = v^2 \circ v = (v \circ v) \circ v = v \circ v \circ v = v \circ (v \circ v) = v \circ v^2 = v \circ u = vu$$
   donc u et v commutent.
   (b) On a :
   $$u\,(v(\mathrm{f}_1)) = (u \circ v)\,(\mathrm{f}_1) = uv\,(\mathrm{f}_1) = vu\,(\mathrm{f}_1) = (v \circ u)\,(\mathrm{f}_1) = v\,(u(\mathrm{f}_1)) = v\,(-2\mathrm{f}_1) = -2v(\mathrm{f}_1)$$
   en particulier $(u + 2\mathrm{Id})\,(v\,(\mathrm{f}_1)) = u\,(v(\mathrm{f}_1)) + 2v(\mathrm{f}_1) = \overrightarrow{0}$ donc $v\,(\mathrm{f}_1) \in \mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id})$. Or $\mathrm{Ker}\,(u + 2\mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}_1)$ donc $\exists \mu \in \mathbb{R},\ v(\mathrm{f}_1) = \mu \mathrm{f}_1$.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = x$.
      i. On a :
      $$u\,(v(x)) = (u \circ v)(x) = uv(x) = vu(x) = (v \circ u)(x) = v\,(u(x)) = v(x)$$
      en particulier $(u - \mathrm{Id})\,(v(x)) = u\,(v(x)) - v(x) = \overrightarrow{0}$ donc $v(x) \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$. Or $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$ donc $v(x) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$.
      ii. Puisque $\mathrm{f}_2 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$, on a $u\,(\mathrm{f}_2) - \mathrm{f}_2 = (u - \mathrm{Id})\,(\mathrm{f}_2) = \overrightarrow{0}$ donc $u\,(\mathrm{f}_2) = \mathrm{f}_2$. En posant $x = \mathrm{f}_2$, on a $v(\mathrm{f}_2) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3)$ d'après le résultat de la question précédente, et donc $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ v(\mathrm{f}_2) = \alpha \mathrm{f}_2 + \beta \mathrm{f}_3$. De même, puisque $\mathrm{f}_3 \in \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id})$, on obtient que $\exists (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2,\ v(\mathrm{f}_3) = \gamma \mathrm{f}_2 + \delta \mathrm{f}_3$.
   (d) D'après les résultats précédents, on en déduit que :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}.$$
   (e) Puisque $u = v^2$, on a :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v^2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)^2$$
   par conséquent :
   $$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 + \gamma\beta & \alpha\gamma + \gamma\delta \\ 0 & \beta\alpha + \delta\beta & \beta\gamma + \delta^2 \end{pmatrix}$$
   en particulier $\mu^2 = -2$ en isolant le coefficient de la première ligne et première colonne.
   (f) Puisqu'il n'existe pas de $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\mu^2 = -2$, le résultat trouvé est absurde. L'hypothèse de départ est donc fausse, par conséquent il n'existe pas d'endomorphisme v de $\mathbb{R}^3$ tel que $v^2 = u$.