

Fonctions réelles de deux variables

Exercice 1

On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + 2x + y^2).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les lignes de niveau de f .
3. Calculer le gradient de f en tout point où il existe.
4. Représenter sur un graphique quelques lignes de niveaux et quelques vecteurs gradient de f afin de déterminer l'allure de la surface représentative de f .

Exercice 2

On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 - xy}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les lignes de niveau de f .
3. Calculer le gradient de f en tout point où il existe.
4. Représenter sur un graphique quelques lignes de niveaux et quelques vecteurs gradient de f afin de déterminer l'allure de la surface représentative de f .

Exercice 3

On considère la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Étudier les lignes de niveau de f .
3. Calculer le gradient de f en tout point où il existe.
4. Représenter sur un graphique quelques lignes de niveaux et quelques vecteurs gradient de f afin de déterminer l'allure de la surface représentative de f .

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^y.$$

Étudier la position relative de la surface représentative de f par rapport à son plan tangent en $(1, 0)$.

Exercice 5

Étudier les extrema des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x^3 - 3x^2 + y^2$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto \ln(4 + 4x - 2y - x^2 - y^2).$$