Corrigé de la feuille de TD n° 2

Nombres

Exercice 1

On a :

(E_1) $3-x=\frac{4}{x+1} \iff x=1$

(E_2) $|2x-4|=x+1 \iff x\in\{1,5\}$

(E_3) $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(3x) \iff x\in\{-1,4\}$

(E_4) $m^2x^2+2mx=3 \iff \begin{cases} \emptyset & \text{si } m=0 \\ \left\{-\frac{3}{m},\frac{1}{m}\right\} & \text{si } m\neq 0 \end{cases}$

(E_5) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{5} \iff x=1$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

(I_1) $|2x+3|\geqslant x+3 \iff x\in]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

(I_2) $-2x^2+7x-5\leqslant 0 \iff x\in]-\infty,1[\cup]\frac{5}{2},+\infty[$

(I_3) $x<\frac{1}{x} \iff]-\infty,-1[\cup]0,1[$

(I_4) $2e^{2x}-7e^x-15>0 \iff x\in]\ln(5),+\infty[$

(I_5) $\frac{x}{x-2}<\frac{6}{x-1} \iff x\in]1,2[\cup]3,4[$

Exercice 3

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ et tout entier $n\in\mathbb{Z}$ on pose $A_n(x)=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$.

1. On a $\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor+1$ donc $10^n x-1<\lfloor 10^n x\rfloor\leqslant 10^n x$. En particulier, $A_n(x)=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^{-n}10^n x=x$ car $10^{-n}>0$.
2. De plus : $A_n(x)=10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor>10^{-n}(10^n x-1)=x-10^{-n}$. Finalement on a : $0\leqslant x-A_n(x)<10^{-n}$ donc $\Delta=10^{-n}$ est un majorant de l'écart entre x et $A_n(x)$.
3. On a $A_n(x)=x$ par exemple dès que $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{Z}$. Par contre $x-A_n(x)=\Delta$ est toujours faux car on a vu que $x-A_n(x)<\Delta$.
4. Puisque $A_3(\sqrt{2})=1,414$, on a $\lfloor 10^3\sqrt{2}\rfloor=1414$ donc $1414\leqslant 10^3\sqrt{2}<1415$. On en déduit que $141,4\leqslant 10^2\sqrt{2}<141,5$ donc $\lfloor 10^2\sqrt{2}\rfloor=141$ et $A_2(\sqrt{2})=1,41$. De même, $-141,5<10^2(-\sqrt{2})<-141,4$ donc $A_2(-\sqrt{2})=-1,42$.
5. Puisque $A_3(e)=2,718$, on a $\lfloor 10^3 e\rfloor=2718$ donc $2718\leqslant 10^3 e<2719$. On en déduit que $4132=2718+1414\leqslant 10^3(e+\sqrt{2})<2719+1415=4134$, puis que $413,2\leqslant 10^2(e+\sqrt{2})<413,4$ donc $\lfloor 10^2(e+\sqrt{2})\rfloor=413$ et $A_2(e+\sqrt{2})=4,13$. De même, $1303=2718-1415<10^3(e-\sqrt{2})<2719+1414=1305$ donc $A_2(e-\sqrt{2})=1,3$.
6. On a $3843252=2718\times 1414\leqslant 10^3e10^3\sqrt{2}=10^6e\sqrt{2}<2719\times 1415=3847385$ donc $384,3252\leqslant 10^2e\sqrt{2}<384,7385$ donc $\lfloor 10^2e\sqrt{2}\rfloor=384$ et $A_2(e\sqrt{2})=3,84$. De même, $\frac{2718}{1415}\leqslant\frac{10^3e}{10^3\sqrt{2}}=\frac{e}{\sqrt{2}}<\frac{2719}{1414}$. Or $10^2\times\frac{2718}{1415}=\frac{271800}{1415}=192+\frac{120}{1415}$ et $10^2\times\frac{2719}{1414}=\frac{271900}{1414}=192+\frac{412}{1414}$ donc $\lfloor 10^2\frac{e}{\sqrt{2}}\rfloor=192$ et $A_2\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right)=1,92$.

Exercice 4

Soient a et b deux nombres réels tels que $0\leqslant b\leqslant a\leqslant 2b$. On a en élevant au carré :

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}+\sqrt{a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}\right)^2\\
=&a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}+2\sqrt{\left(a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)\left(a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)}+a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\\
=&2a+2\sqrt{a^2-\left(2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)^2}=2a+2\sqrt{a^2-4b(a-b)}=2a+2\sqrt{a^2-4ab+4b^2}\\
=&2a+2\sqrt{(a-2b)^2}=2a+2|a-2b|=2a+2(2b-a)=4b \quad \text{car } a\leqslant 2b.
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}+\sqrt{a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}=2\sqrt{b}$.

Exercice 5

On considère les ensembles suivants :

$$A=[0,1]\cup]2,+\infty[\qquad B=]-1,0[\cup\{1\}$$

$$C=\left\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^\star\right\} \qquad D=\{0,-1,2,-3,4,-5,6,-7,\ldots\}$$

$$E=\left\{(-1)^n+\frac{1}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\} \qquad F=\{x\in\mathbb{R}\mid\lfloor 1-x\rfloor=2\}$$

— $\min(A)=\inf(A)=0$ mais A n'a ni de plus grand élément ni de borne supérieure.
— B n'a pas de plus petit élément, $\inf(B)=-1$ et $\max=\sup(B)=1$.
— C n'a pas de plus petit élément, $\inf(C)=0$ et $\max=\sup(C)=1$.
— D n'a pas de plus petit élément, ni de plus grand élement, ni de borne inférieure, ni de borne supérieure..
— E n'a pas de plus petit élément, $\inf(E)=-1$ et $\max(E)=\sup(E)=2$.
— $F=]-2,-1]$ (car $\lfloor 1-x\rfloor=2\iff 1-x\in[2,3[$) n'a pas de plus petit élément, $\inf(F)=-2$ et $\max(F)=\sup(F)=-1$.

Exercice 6

On a :

(E_1) $\lfloor\sqrt{x^2+1}\rfloor = 2 \iff x \in]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$

(E_2) $|x-1| = |2x-5| \iff x \in \{4, 2\}$

(E_3) $x + \sqrt{2x+1} = 1 \iff x = 0$

(E_4) $\ln\left((x+2)(x-2)\right) = \ln(2x+11) \iff x \in \{-3, 5\}$

(E_5) $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11) \iff x \in \{5\}$

(E_6) $2e^{-x} - 6e^{x} = 1 \iff x \in \{-\ln(2)\}$

(E_7) $x^2 - 2mx - m + 6 = 0 \iff$

$$x \in \begin{cases} \left\{m - \sqrt{(m+3)(m-2)},\right. \\ \qquad\qquad \left. m + \sqrt{(m+3)(m-2)}\right\} & \text{si } m \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[\\ \{m\} & \text{si } m \in \{-3, 2\} \\ \emptyset & \text{si } m \in]-3, 2[\end{cases}$$

(E_8) $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0 \iff x \in \left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}\right\}$

(E_9) $x^{x^3} = x^{3x} \iff x \in \{1, \sqrt{3}\}$

Exercice 7

On a :

(I_1) $x + \frac{1}{x} \geqslant 0 \iff x > 0$

(I_2) $|3x-1| > |x+2| \iff x \in]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

(I_3) $(\ln(x))^2 > 1 \iff x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup]e, +\infty[$

(I_4) $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x-1 \iff x \in]-\infty, -3[$

(I_5) $e^{-2x} - e^{-x} > 0 \iff x \in]-\infty, 0[$

(I_6) $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup [0, 3[\cup[5, +\infty[$

(I_7) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1) \iff x \in]1, 1+\sqrt{2}]$

(I_8) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1 \iff x \in]-\infty, -1[$

(I_9) $\frac{5}{x+9} - \frac{2}{2x+3} > \frac{7}{9(x+1)} \iff x \in \left]-9, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{36}{29}, -1\right[\cup]3, +\infty[$

Exercice 8

On a :

$$\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z - 6 + 5i|\} = \left\{x + i\left(\frac{6}{5}x - \frac{61}{10}\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z(2\overline{z} + 1) = 1\} = \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

$$\mathcal{S}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x + i\left(\frac{20}{3}x - 4\right),\ x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\mathcal{S}_4 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0\right\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \setminus \{-1\}$$

Exercice 9

Soit $(z, w) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)\left(\overline{z+w}\right) + (z-w)\left(\overline{z-w}\right) \\ &= (z+w)\left(\overline{z} + \overline{w}\right) + (z-w)\left(\overline{z} - \overline{w}\right) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{z} - z\overline{w} - w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= 2\left(|z|^2 + |w|^2\right). \end{aligned}$$

Exercice 10

On a :

(E_1) $z^2 + 29 = 10z \iff z \in \{5-2i, 5+2i\}$

(E_2) $z + \dfrac{1}{z} = 1 \iff z \in \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(E_3) $z^3 - 3z^2 + 5z = 3 \iff z \in \left\{1, 1 - i\sqrt{2}, 1 + i\sqrt{2}\right\}$

(E_4) $4z^2 + 12mz + 36m + 48 = 3 \iff$

$$z \in \begin{cases} \left\{-\frac{3}{2}\left(m - \sqrt{(m+1)(m-5)}\right),\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{3}{2}\left(m + \sqrt{(m+1)(m-5)}\right)\right\} & \text{si } m \in]-\infty, -1[\cup]5, +\infty[\\ \left\{-\frac{3}{2}m\right\} & \text{si } m = -1 \text{ ou } m = 5 \\ \left\{-\frac{3}{2}\left(m - i\sqrt{-(m+1)(m-5)}\right),\right. \\ \qquad\qquad \left. -\frac{3}{2}\left(m + i\sqrt{-(m+1)(m-5)}\right)\right\} & \text{si } m \in]-1, 5[\end{cases}$$

(E_5) $z^7 = z \iff z \in \left\{0, 1, e^{i\pi/3}, e^{i2\pi/3}, -1, e^{i4\pi/3}, e^{i5\pi/3}\right\}$

Exercice 11

Soit $(u, v) \in \mathbb{C}^2$. On a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u+v &=& 4 \\ uv &=& 2(\sqrt{5}-1) \end{array}\right. \iff (u,v) = \left(2 - \sqrt{2(3-\sqrt{5})}, 2 + \sqrt{2(3-\sqrt{5})}\right)$$

$$\text{ou} \quad (u,v) = \left(2 + \sqrt{2(3-\sqrt{5})}, 2 - \sqrt{2(3-\sqrt{5})}\right).$$

Exercice 12

On a :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 = \frac{64}{27}e^{i\pi} \\
z_2 &= (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^4 = e^{-4i\theta} \\
z_3 &= \frac{6-4i}{5+i} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4} \\
z_4 &= \frac{11+3i}{1+i} = \sqrt{65}e^{-i\arccos(7/\sqrt{65})}
\end{aligned}$$

Exercice 13

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned}
z &= (\cos(\alpha) + \sin(\beta)) + i\,(\sin(\alpha) + \cos(\beta)) \\
&= \left(\cos(\alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) + i\left(\sin(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) \\
&= e^{i\alpha} + e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)} \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{2}\right) e^{i\left(\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right)/2} \\
&= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} & \text{si } \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0 \\ -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi\right)} & \text{si } \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z},\ \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\\ -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)} & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} & \text{si } \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha+\beta \in \left]-\frac{\pi}{4} + 4k\pi, \frac{3\pi}{4} + 4k\pi\right[\\ -2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)} & \text{sinon} \end{cases}.
\end{aligned}$$