Corrigé de la feuille de TD n° 2

Nombres réels

Exercice 1

On obtient :

$$\left\lfloor\sqrt{42}\right\rfloor = 6, \quad \left\lfloor\sqrt{11}+\sqrt{13}\right\rfloor = 6, \quad \left\lfloor\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}\right\rfloor = 7 \quad \text{et} \quad \left\lfloor 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right\rfloor = 7.$$

Exercice 2

On a :

(E_1) $3 - x = \frac{4}{x+1} \iff x = 1$

(E_2) $|2x-4| = x+1 \iff x \in \{1, 5\}$

(E_3) $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(3x) \iff x = 4$

(E_4) $m^2x^2 + 2mx = 3 \iff \begin{cases} \emptyset & \text{si } m = 0 \\ \left\{-\frac{3}{m}, \frac{1}{m}\right\} & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$

(E_5) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{5} \iff x = 1$

Exercice 3

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(I_1) $|2x+3| \geqslant x+3 \iff x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$

(I_2) $-2x^2 + 7x - 5 \leqslant 0 \iff x \in]-\infty, 1[\cup \left]\frac{5}{2}, +\infty\right[$

(I_3) $x < \frac{1}{x} \iff]-\infty, -1[\cup]0, 1[$

(I_4) $2e^{2x} - 7e^x - 15 > 0 \iff x \in]\ln(5), +\infty[$

(I_5) $\frac{x}{x-2} < \frac{6}{x-1} \iff x \in]1, 2[\cup]3, 4[$

Exercice 4

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$ on pose $A_n(x) = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$.

1. On a $\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$ donc $10^n x - 1 < \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x$. En particulier, $A_n(x) = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^{-n}10^n x = x$ car $10^{-n} > 0$.
2. De plus : $A_n(x) = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor > 10^{-n}(10^n x - 1) = x - 10^{-n}$. Finalement on a : $0 \leqslant x - A_n(x) < 10^{-n}$ donc $\Delta = 10^{-n}$ est un majorant de l'écart entre x et $A_n(x)$.
3. On a $A_n(x) = x$ par exemple dès que $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$. Par contre $x - A_n(x) = \Delta$ est toujours faux car on a vu que $x - A_n(x) < \Delta$.
4. Puisque $A_3(\sqrt{2}) = 1,414$, on a $\lfloor 10^3\sqrt{2}\rfloor = 1414$ donc $1414 \leqslant 10^3\sqrt{2} < 1415$. On en déduit que $141,4 \leqslant 10^2\sqrt{2} < 141,5$ donc $\lfloor 10^2\sqrt{2}\rfloor = 141$ et $A_2(\sqrt{2}) = 1,41$. De même, $-141,5 < 10^2(-\sqrt{2}) < -141,4$ donc $A_2(-\sqrt{2}) = -1,42$.
5. Puisque $A_3(e) = 2,718$, on a $\lfloor 10^3 e\rfloor = 2718$ donc $2718 \leqslant 10^3 e < 2719$. On en déduit que $4132 = 2718 + 1414 \leqslant 10^3(e+\sqrt{2}) < 2719 + 1415 = 4134$, puis que $413,2 \leqslant 10^2(e+\sqrt{2}) < 413,4$ donc $\lfloor 10^2(e+\sqrt{2})\rfloor = 413$ et $A_2(e+\sqrt{2}) = 4,13$. De même, $1303 = 2718 - 1415 < 10^3(e-\sqrt{2}) < 2719 + 1414 = 1305$ donc $A_2(e-\sqrt{2}) = 1,3$.
6. On a $3843252 = 2718 \times 1414 \leqslant 10^3 e 10^3\sqrt{2} = 10^6 e\sqrt{2} < 2719 \times 1415 = 3847385$ donc $384,3252 \leqslant 10^2 e\sqrt{2} < 384,7385$ donc $\lfloor 10^2 e\sqrt{2}\rfloor = 384$ et $A_2(e\sqrt{2}) = 3,84$. De même, $\frac{2718}{1415} \leqslant \frac{10^3 e}{10^3\sqrt{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}} < \frac{2719}{1414}$. Or $10^2 \times \frac{2718}{1415} = \frac{271800}{1415} = 192 + \frac{120}{1415}$ et $10^2 \times \frac{2719}{1414} = \frac{271900}{1414} = 192 + \frac{412}{1414}$ donc $\lfloor 10^2\frac{e}{\sqrt{2}}\rfloor = 192$ et $A_2\left(\frac{e}{\sqrt{2}}\right) = 1,92$.

Exercice 5

Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant b \leqslant a \leqslant 2b$. On a en élevant au carré :

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} + \sqrt{a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}}\right)^2 \\
=&a + 2\sqrt{b}\sqrt{a-b} + 2\sqrt{\left(a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)\left(a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)} + a - 2\sqrt{b}\sqrt{a-b} \\
=&2a + 2\sqrt{a^2 - \left(2\sqrt{b}\sqrt{a-b}\right)^2} = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4b(a-b)} = 2a + 2\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2} \\
=&2a + 2\sqrt{(a-2b)^2} = 2a + 2|a-2b| = 2a + 2(2b-a) = 4b \quad \text{car } a \leqslant 2b.
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{a+2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} + \sqrt{a-2\sqrt{b}\sqrt{a-b}} = 2\sqrt{b}$.

Exercice 6

On considère les ensembles suivants :

$$\begin{aligned}
&A = [0,1] \cup]2, +\infty[&& B =]-1, 0[\cup \{1\} \\
&C = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^\star\right\} && D = \{0, -1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, \ldots\} \\
&E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\} && F = \{x \in \mathbb{R} \mid \lfloor 1-x\rfloor = 2\}
\end{aligned}$$

— $\min(A) = \inf(A) = 0$ mais A n'a ni de plus grand élément ni de borne supérieure.

— B n'a pas de plus petit élément, $\inf(B) = -1$ et $\max = \sup(B) = 1$.

— C n'a pas de plus petit élément, $\inf(C) = 0$ et $\max = \sup(C) = 1$.

— D n'a pas de plus petit élément, ni de plus grand élement, ni de borne inférieure, ni de borne supérieure..

— E n'a pas de plus petit élément, $\inf(E) = -1$ et $\max(E) = \sup(E) = 2$.

— $F =]-2, -1]$ (car $\lfloor 1-x\rfloor = 2 \iff 1-x \in [2, 3[$) n'a pas de plus petit élément, $\inf(F) = -2$ et $\max(F) = \sup(F) = -1$.

Exercice 7

On a :

(E_1) $\lfloor\sqrt{x^2+1}\rfloor = 2 \iff x \in]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$

(E_2) $|x-1| = |2x-5| \iff x \in \{4, 2\}$

(E_3) $x + \sqrt{2x+1} = 1 \iff x = 0$

(E_4) $\ln\left((x+2)(x-2)\right) = \ln(2x+11) \iff x \in \{-3, 5\}$

(E_5) $\ln(x+2) + \ln(x-2) = \ln(2x+11) \iff x \in \{5\}$

(E_6) $2e^{-x} - 6e^{x} = 1 \iff x \in \{-\ln(2)\}$

(E_7) $x^2 - 2mx - m + 6 = 0 \iff$

$$x \in \begin{cases} \left\{m - \sqrt{(m+3)(m-2)}, \quad m + \sqrt{(m+3)(m-2)}\right\} & \text{si } m \in]-\infty, -3[\cup]2, +\infty[\\ \{m\} & \text{si } m \in \{-3, 2\} \\ \emptyset & \text{si } m \in]-3, 2[\end{cases}$$

(E_8) $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) + 2 = 0 \iff x \in \left\{\frac{1}{e}, \frac{1}{e^2}\right\}$

(E_9) $x^{x^3} = x^{3x} \iff x \in \{1, \sqrt{3}\}$

Exercice 8

On a :

(I_1) $x + \frac{1}{x} \geqslant 0 \iff x > 0$

(I_2) $|3x-1| > |x+2| \iff x \in]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]\frac{3}{2}, +\infty[$

(I_3) $(\ln(x))^2 > 1 \iff x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\cup]e, +\infty[$

(I_4) $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geqslant 2x - 1 \iff x \in]-\infty, -3[$

(I_5) $e^{-2x} - e^{-x} > 0 \iff x \in]-\infty, 0[$

(I_6) $\frac{4x^2-15x-3}{2x^2-5x-3} \geqslant 1 \iff x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup [0, 3[\cup[5, +\infty[$

(I_7) $\ln(2x) \geqslant \ln(x^2-1) \iff x \in]1, 1+\sqrt{2}]$

(I_8) $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}} < 1 \iff x \in]-\infty, -1[$

(I_9) $\frac{5}{x+9} - \frac{2}{2x+3} > \frac{7}{9(x+1)} \iff x \in \left]-9, -\frac{3}{2}\right[\cup \left]-\frac{36}{29}, -1\right[\cup]3, +\infty[$