Feuille de TD n° 3

Trigonométrie

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.

Exercice 2

Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$.

Exercice 3

Calculer le cosinus, le sinus et la tangente de $\frac{\pi}{16}$.

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(\theta) + \sin(\theta)$
2. $\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta)$
3. $-5\cos(\theta) - 2\sqrt{6}\sin(\theta)$
4. $-3\cos(\theta) + 4\sin(\theta)$
5. $4\sqrt{2}\cos(\theta) - 7\sin(\theta)$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1 = 0$
2. $\sin(\theta) - \cos(\theta) - 1 = 0$
3. $2\sin^2(\theta) - 3\cos(\theta) - 3 = 0$
4. $\cos^2(\theta) + 3\sin(\theta) - 3 = 0$
5. $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0$

Exercice 6

Dans tout cet exercice, on fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$.
   On dit qu'on a transformé le produit $\cos(\alpha)\cos(\beta)$ en somme de cosinus.
2. Transformer le produit $\sin(\alpha)\sin(\beta)$ en somme de cosinus.
3. Transformer le produit $\cos(\alpha)\sin(\beta)$ en somme de sinus.

Exercice 7

Dans tout cet exercice, on fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
   On dit qu'on a transformé la somme $\cos(\alpha) + \cos(\beta)$ en produit de cosinus et de sinus.
2. Transformer la somme $\sin(\alpha) + \sin(\beta)$ en produit de cosinus et de sinus.
3. Transformer la somme $\cos(\alpha) + \sin(\beta)$ en produit de cosinus.

Exercice 8

On propose de démontrer une propriété de la fonction arctangente.

1. Rappeler le domaine $\mathcal{D}_{\tan}$ de définition de la fonction tangente.
2. Soit $\theta \in \mathcal{D}_{\tan}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \theta \in \mathcal{D}_{\tan}$. Exprimer $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$.
3. En déduire une expression de $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t})$ pour tout $t \in \mathbb{R}^\star$ (on distinguera les cas $t > 0$ et $t < 0$).