Corrigé de la feuille de TD n° 3

Trigonométrie

Exercice 1

On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$
2. $\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})$
3. $-5\cos(\theta) - 2\sqrt{6}\sin(\theta) = 7\cos(\theta + \arccos(-\frac{5}{7}))$

Exercice 2

Linéariser les expressions suivantes pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\cos^2(\theta)\sin(\theta) = \frac{1}{4}(\sin(3\theta) + \sin(\theta))$
2. $\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = \frac{1}{8}(-\cos(4\theta) + 1)$
3. $\cos^3(\theta) = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta))$
4. $\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) = \frac{1}{16}(-\sin(5\theta) + \sin(3\theta) + 2\sin(\theta))$
5. $\cos^5(\theta) = \frac{1}{16}(\cos(5\theta) + 5\cos(3\theta) + 10\cos(\theta))$

Exercice 3

Développer les expressions suivantes pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)$
2. $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cos(4\theta) = \cos(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) + \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$
3. $\sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$
4. $\cos(5\theta) = \cos^5(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) + 5\cos(\theta)\sin^4(\theta)$
5. $\sin(5\theta) = \sin^5(\theta) - 10\cos^2(\theta)\sin^3(\theta) + 5\cos^4(\theta)\sin(\theta)$

Exercice 4

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) = 1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
2. $\sin(\theta) - \cos(\theta) > 1 \iff \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right[$
3. $2\cos^2(\theta) + 3\cos(\theta) + 1 = 0 \iff \theta \equiv \pi\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $\theta \equiv \frac{4\pi}{3}\ [2\pi]$
4. $\cos(3\theta) \geqslant 0 \iff \theta \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right]$
5. $\tan^2(2\theta) = 1 \iff \theta \equiv \frac{\pi}{8}\ [\frac{\pi}{2}]$ ou $\theta \equiv -\frac{\pi}{8}\ [\frac{\pi}{2}]$

Exercice 5

Puisque $\frac{\pi}{12} \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a $\cos(\frac{\pi}{12}) \geqslant 0$ et $\sin(\frac{\pi}{12}) \geqslant 0$. Par conséquent, on obtient en utilisant les formules de bissection :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

En utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, on en déduit :

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = 2-\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = 2+\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = -2-\sqrt{3}$$

$$\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = -2+\sqrt{3}$$

Exercice 6

On propose de démontrer une propriété de la fonction arctangente.

1. Le domaine de définition de la fonction tangente est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Pour tout $\theta \in \mathcal{D}_{\tan}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \theta \in \mathcal{D}_{\tan}$, on a $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$.
3. Pour tout $\theta \in \mathcal{D}_{\tan}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \theta \in \mathcal{D}_{\tan}$, on a en utilisant la formule d'addition de la fonction tangente (car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$) :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{1 + \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \theta)} = \frac{1 + \frac{1 - \tan(\theta)}{1 + \tan\theta}}{1 - \frac{1 - \tan(\theta)}{1 + \tan\theta}} = \frac{1}{\tan(\theta)}.$$

4. Soit $t > 0$. On pose $\theta = \arctan(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. D'après la résultat précédent, on a :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{\tan(\arctan(t))} = \frac{1}{t}.$$

Puisque $\frac{\pi}{2} - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on en déduit que $\arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ et par conséquent :

$$\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit maintenant $t < 0$. Pour $\theta = \arctan(t) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, on a de même $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{t}$. Mais puisque $\frac{\pi}{2} - \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on en déduit que $\arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} - \theta - \pi = -\frac{\pi}{2} - \theta$ et par conséquent :

$$\forall t < 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$