Corrigé de la feuille de TD n° 3

Trigonométrie

Exercice 1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On obtient à l'aide des formules de trigonométrie :

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta).$$

Exercice 2

On obtient à l'aide des formules de trigonométrie :

$$\cos\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \tan\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = 2-\sqrt{3},$$

$$\cos\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ \sin\left(\tfrac{5\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \tan\left(\tfrac{\pi}{12}\right) = 2+\sqrt{3},$$

$$\cos\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) = -\tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4},\ \sin\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \tan\left(\tfrac{7\pi}{12}\right) = -2-\sqrt{3},$$

$$\cos\left(\tfrac{11\pi}{12}\right) = -\tfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = -\tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},\ \sin\left(\tfrac{11\pi}{12}\right) = \tfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \tfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \tan\left(\tfrac{11\pi}{12}\right) = -2+\sqrt{3}.$$

Exercice 3

On obtient à l'aide des formules de trigonométrie :

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2},\quad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\text{et}\quad \tan\left(\frac{\pi}{16}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}} - 1 - \sqrt{2}.$$

Exercice 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos(\theta - \frac{\pi}{4})$
2. $\cos(\theta) - \sqrt{3}\sin(\theta) = 2\cos(\theta + \frac{\pi}{3})$
3. $-5\cos(\theta) - 2\sqrt{6}\sin(\theta) = 7\cos(\theta + \arccos(-\frac{5}{7}))$
4. $-3\cos(\theta) + 4\sin(\theta) = \cos(\theta - \arccos(-\frac{3}{5}))$
5. $4\sqrt{2}\cos(\theta) - 7\sin(\theta) = \cos(\theta + \arccos(\frac{4\sqrt{2}}{9}))$

Exercice 5

On a :

1. $\sqrt{3}\cos(\theta) - \sin(\theta) - 1 = 0 \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
2. $\sin(\theta) - \cos(\theta) - 1 = 0 \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi + 2k\pi\right)$
3. $2\sin^2(\theta) - 3\cos(\theta) - 3 = 0 \iff \left(\begin{array}{c}\exists k \in \mathbb{Z},\quad \theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \pi + 2k\pi \\ \text{ou } \theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\end{array}\right)$
4. $\cos^2(\theta) + 3\sin(\theta) - 3 = 0 \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$
5. $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 0 \iff \left(\exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$

Exercice 6

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. On a :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta).$$

Donc :

$$\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} = \cos(\alpha)\cos(\beta).$$

2. De même, on trouve $\frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\sin(\beta)$.
3. De même, on trouve $\frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\sin(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta)$.

Exercice 7

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. On a :

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = \beta.$$

D'après les formules obtenues à l'exercice précédent, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cos(\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha) \\ &= \frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}{2}.\end{aligned}$$

Donc $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

2. De même, on trouve $\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
3. De même, on trouve $\cos(\alpha) + \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 8

On propose de démontrer une propriété de la fonction arctangente.

1. Le domaine de définition de la fonction tangente est $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. Pour tout $\theta \in \mathcal{D}_{\tan}$ tel que $\frac{\pi}{2} - \theta \in \mathcal{D}_{\tan}$, on obtient à l'aide des formules de trigonométrie :
$$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$$
.
3. Soit $t > 0$. On pose $\theta = \arctan(t) \in]0, \frac{\pi}{2}[$. D'après la résultat précédent, on a :
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{\tan(\arctan(t))} = \frac{1}{t}.$$
Puisque $\frac{\pi}{2} - \theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on en déduit que $\arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ et par conséquent :
$$\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
Soit maintenant $t < 0$. Pour $\theta = \arctan(t) \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, on a de même $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{t}$. Mais puisque $\frac{\pi}{2} - \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, on en déduit que $\arctan(\frac{1}{t}) = \frac{\pi}{2} - \theta - \pi = -\frac{\pi}{2} - \theta$ et par conséquent :
$$\forall t < 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$