

# Feuille de TD n° 4

## Nombres complexes

### Exercice 1

Déterminer chacun des sous-ensembles de  $\mathbb{C}$  suivants :

$$\mathcal{S}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z - 6 + 5i|\} \quad \mathcal{S}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z(2\bar{z} + 1) = 1\}$$
$$\mathcal{S}_3 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z + 4i}{5z - 3} \in \mathbb{R}\right\} \quad \mathcal{S}_4 = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) = 0\right\}$$

### Exercice 2

Montrer que  $\forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$ ,  $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ .

### Exercice 3

Résoudre les équations suivantes d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$(E_1) \quad z^2 + 29 = 10z$$

$$(E_2) \quad z + \frac{1}{z} = 1$$

$$(E_3) \quad z^3 - 3z^2 + 5z = 3$$

$$(E_4) \quad 4z^2 + 12mz + 36m + 48 = 3, \text{ en fonction du paramètre } m \in \mathbb{R}$$

$$(E_5) \quad z^7 = z$$

### Exercice 4

Déterminer tous les couples  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$  de nombres complexes tels que :

$$u + v = 4 \quad \text{et} \quad uv = 2(\sqrt{5} - 1).$$

### Exercice 5

Ecrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle :

$$z_1 = \left(-1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6 \quad z_2 = (\cos(\theta) - i\sin(\theta))^4 \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R})$$
$$z_3 = \frac{6 - 4i}{5 + i} \quad z_4 = \frac{11 + 3i}{1 + i}$$

### Exercice 6

Pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , écrire le nombre complexe suivant sous forme exponentielle :

$$z = (\cos(\alpha) + \sin(\beta)) + i(\sin(\alpha) + \cos(\beta)).$$

### Exercice 7

Linéariser les expressions suivantes pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

1.  $\cos^2(\theta) \sin(\theta)$

2.  $\cos^2(\theta) \sin^2(\theta)$

3.  $\cos^3(\theta)$

4.  $\cos^2(\theta) \sin^3(\theta)$

5.  $\cos^5(\theta)$

### Exercice 8

Développer les expressions suivantes pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

1.  $\cos(3\theta)$

2.  $\cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cos(4\theta)$

3.  $\sin(4\theta)$

4.  $\cos(5\theta)$

5.  $\sin(5\theta)$