Feuille de TD n° 4

Suites numériques

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 4u_n + 1.$$

1. Exprimer chaque terme u_n en fonction de $n \geqslant 0$.
2. Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée.
4. Exprimer la somme des n premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en fonction de $n \geqslant 0$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 8$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2. $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.
3. $u_0 = 0$, $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$.

Exercice 3

Déterminer la raison et le premier terme u_0 de la suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_5 = 27$ et $u_7 = 7$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} - 1.$$

1. Représenter graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie.
3. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas majorée.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \ln(u_n)$. Exprimer chaque terme v_n en fonction de $n \geqslant 0$.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est d'étudier une figure géométrique appelée flocon de von Koch. Cette figure s'obtient en partant d'un triangle équilatéral de côté 1 que l'on modifie de la façon suivante :

— On divise chaque segment en trois segments de longueurs égales.
— Sur chaque segment médian obtenu précédemment, on construit un triangle équilatéral ayant pour base ce segment médian (et «orienté» vers l'extérieur).
— On supprime tous les segments médians, c'est-à-dire toutes les bases des triangles équilatéraux ainsi construits.

On réitère ensuite indéfiniment le processus. Le flocon de von Koch est la limite de la courbe obtenue (après une «infinité» d'étapes).

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on note ℓ_n la longueur de chaque segment de la construction après la n-ième étape (ainsi $\ell_0 = 1$), N_n le nombre de segments de la construction après la n-ième étape (ainsi $N_0 = 3$), P_n le périmètre de la construction après la n-ième étape et A_n l'aire de la construction après la n-ième étape.

1. Exprimer ℓ_n en fonction de $n \geqslant 0$.
2. Exprimer N_n en fonction de $n \geqslant 0$.
3. Exprimer P_n en fonction de $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire pour le périmètre du flocon de von Koch ?
4. (a) Rappeler la formule donnant l'aire d'un triangle équilatéral de côté $c > 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0,\ A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $A_n - A_0$ est égale à la somme des n premiers termes d'une suite géométrique qu'on précisera.
   (d) Exprimer A_n en fonction de $n \geqslant 0$.
   (e) Que peut-on en déduire pour l'aire du flocon de von Koch ?