Feuille de TD n° 5

Sommes et produits

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme des cubes d'entiers compris entre n et $2n$ (inclus).

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les expressions suivantes à l'aide de sommes et de produits télescopiques :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$.
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{3}{k}\right)$.
3. $\forall \theta \in \mathbb{R},\ S_3 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \sin\left((2k+1)\frac{\theta}{2}\right)$.
4. $P_1 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$.
5. $P_2 = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer les sommes et les produits suivants :

1. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} (i+j)$ puis $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (i+j)$.
2. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 2^{i+j}$ puis $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j}$;
3. $\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij$ puis $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, exprimer $f(x)$ sans le symbole $\sum$.
2. En dérivant f de deux façons différentes, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

Exercice 6

On fixe un entier $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \geqslant m,\ \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Développer $\cos(9\theta)$ et $\sin(9\theta)$.
2) Linéariser $\cos^4(\theta)\sin^5(\theta)$ et $\cos^5(\theta)\sin^4(\theta)$.

Exercice 8

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

1. Rappeler les expressions de A_n et B_n en fonction de n.
2. En calculant de deux façons différentes $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$, exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1}.$$