Corrigé de la feuille de TD n° 5

Suites réelles

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = 4u_n + 1.$$

1. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = \frac{4^n-1}{3}$.
2. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.
3. Par l'absurde, si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, alors il existe un majorant $M \in \mathbb{R}$. Mais en choisissant un entier $n > \frac{\ln(3M+1)}{\ln(4)}$ on obtient $u_n > M$ ce qui est absurde.
4. $\forall n \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \frac{4^n-1}{9} - \frac{n}{3}$.

Exercice 2

1. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = (1+3n)2^n$.
2. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = (\sqrt{2})^n(-\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right))$.
3. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = \sqrt{5}\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Exercice 3

Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique telle que $u_5 = 27$ et $u_7 = 7$ alors son premier terme est $u_0 = 77$ et sa raison vaut -10.

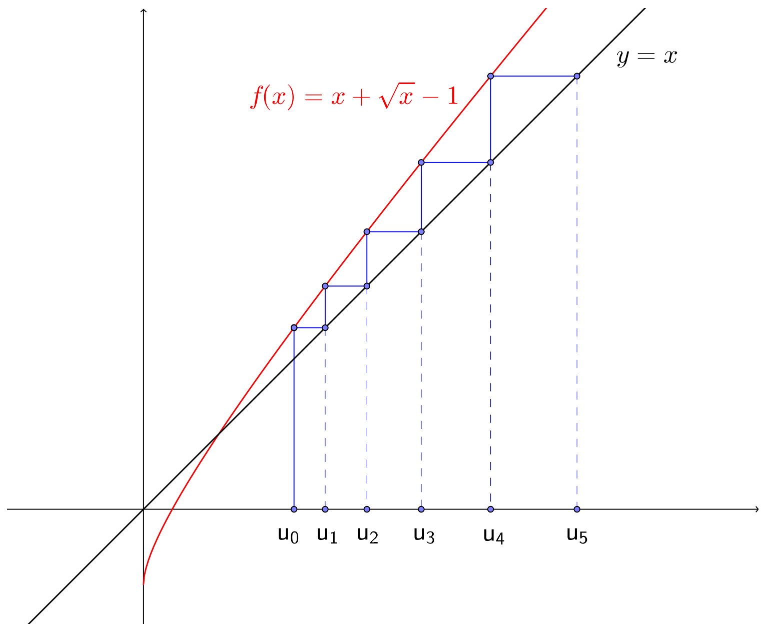
$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = 77 - 10n.$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} - 1.$$

1. On pose $f : x \mapsto x + \sqrt{x} - 1$. On a :



2. On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 0,\ u_n > 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bien définie car f est définie sur $[0, +\infty[$.
3. En utilisant que la courbe représentative de f est au-dessus de la première bissectrice sur $]1, +\infty[$, on en déduit que $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = f(u_n) > u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.
4. Par l'absurde, si la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée, alors il existe des majorants. On note M le plus petit des majorants, autrement dit $M = \sup\{u_n,\ n \geqslant 0\}$. En particulier, il existe un rang $n \geqslant 0$ tel que $M - 1 < u_n < M$ (sinon $M-1$ serait aussi un majorant ce qui est absurde puisque M est le plus petit). On a alors :

$$u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} - 1 > M - 1 + \sqrt{M-1} - 1 = M + \sqrt{M-1} - 2.$$

Puisque $u_5 \approx 5.76$, on a $M > 5$ et donc $u_{n+1} > M + \sqrt{5-1} - 2 = M$, ce qui est absurde puisque M est un majorant de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 4$ et la relation de récurrence

$$\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}.$$

1. Par récurrence, on montre que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement positive.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \ln(u_n)$. On a :

$$\forall n \geqslant 0,\ v_{n+2} = \ln(u_{n+2}) = \ln\left(\frac{u_{n+1}^4}{u_n^3}\right) = 4\ln(u_{n+1}) - 3\ln(u_n) = 4v_{n+1} - 3v_n.$$

Par conséquent $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \frac{\ln(2)}{2}\left(1+3^n\right)$.
3. $\forall n \geqslant 0,\ u_n = e^{v_n} = 2^{(1+3^n)/2}$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est d'étudier une figure géométrique appelée flocon de von Koch. Cette figure s'obtient en partant d'un triangle équilatéral de côté 1 que l'on modifie de la façon suivante :

— On divise chaque segment en trois segments de longueurs égales.

— Sur chaque segment médian obtenu précédemment, on construit un triangle équilatéral ayant pour base ce segment médian (et «orienté» vers l'extérieur).

— On supprime tous les segments médians, c'est-à-dire toutes les bases des triangles équilatéraux ainsi construits.

On réitère ensuite indéfiniment le processus. Le flocon de von Koch est la limite de la courbe obtenue (après une «infinité» d'étapes).

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on note ℓ_n la longueur de chaque segment de la construction après la n-ième étape (ainsi $\ell_0 = 1$), N_n le nombre de segments de la construction après la n-ième étape (ainsi $N_0 = 3$), P_n le périmètre de la construction après la n-ième étape et A_n l'aire de la construction après la n-ième étape.

1. $\forall n \geqslant 0,\ \ell_n = \frac{1}{3^n} = 3^{-n}$.
2. $\forall n \geqslant 0,\ N_n = 3 \times 4^n$.
3. $\forall n \geqslant 0,\ P_n = N_n \ell_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n$. On a $\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ car $\frac{4}{3} > 1$, donc le périmètre du flocon de von Koch est infini.
4. (a) L'aire d'un triangle équilatéral de côté $c > 0$ est $c^2\frac{\sqrt{3}}{4}$.

   (b) $\forall n \geqslant 0,\ A_{n+1} = A_n + N_n(\ell_{n+1})^2\frac{\sqrt{3}}{4} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.

   (c) $\forall n \geqslant 0,\ A_n - A_0 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(A_{k-1} - A_k\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

   (d) $\forall n \geqslant 0,\ A_n = A_0 + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{1-(4/9)^n}{1-(4/9)} = \frac{\sqrt{3}}{20}\left(8 - 3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$.

   (e) On a $\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$ car $0 < \frac{4}{9} < 1$, donc l'aire du flocon de von Koch est finie.