

Sommes et produits

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=n}^{2n} k^3 = \sum_{k=1}^{2n} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{3n^2(5n^2+6n+1)}{4}.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k} = e^{(n+1)/2}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}.$
- $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{3}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+3) - \ln(k)) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\right).$
- Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sum_{k=0}^n \sin\left((2k+1)\frac{\theta}{2}\right) &= \sum_{k=0}^n \left[\sin\left((2k+1)\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \left[\cos\left((2k+2)\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left((2k)\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n [\cos(k\theta) - \cos((k+1)\theta)] \\ &= \frac{1 - \cos((n+1)\theta)}{2}. \end{aligned}$$

- $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$
- $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}.$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (i+j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n^2(n+1)$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j (i+j) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right) = \frac{n(n+1)^2}{2}.$
- $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} 2^{i+j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2^{i+j} = \sum_{i=1}^n 2^i \sum_{j=1}^n 2^j = 4(2^n - 1)^2$ et $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 2^{i+j} = \sum_{j=1}^n \left(2^j \sum_{i=1}^j 2^i\right) = 2 \sum_{j=1}^n (4^j - 2^j) = \frac{8}{3}4^n - 2^{n+2} + \frac{4}{3}.$
- $\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} ij = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n ij = \prod_{i=1}^n \left(i^n \prod_{j=1}^n j\right) = (n!)^n (\prod_{i=1}^n i)^n = (n!)^{2n}$ et $\prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sqrt{\prod_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} ij \times \prod_{k=1}^n k^2} = \sqrt{(n!)^{2n} \times (n!)^2} = (n!)^{n+1}.$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$
- Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)x^k = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$

Exercice 6

On fixe un entier $m \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Pascal, on peut démontrer par récurrence que $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ est vraie pour tout entier $n \geq m$.

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on a : $\cos(9\theta) = \cos^9(\theta) - 36 \cos^7(\theta) \sin^2(\theta) + 126 \cos^5(\theta) \sin^4(\theta) - 84 \cos^3(\theta) \sin^6(\theta) + 9 \cos(\theta) \sin^8(\theta)$ et $\sin(9\theta) = \sin^9(\theta) - 36 \cos^2(\theta) \sin^7(\theta) + 126 \cos^4(\theta) \sin^5(\theta) - 84 \cos^6(\theta) \sin^3(\theta) + 9 \cos^8(\theta) \sin(\theta).$
- D'après les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, on a : $\cos^4(\theta) \sin^5(\theta) = \frac{1}{256} (\sin(9\theta) - \sin(7\theta) - 4 \sin(5\theta) + 4 \sin(3\theta) + 6 \sin(\theta))$ et $\cos^5(\theta) \sin^4(\theta) = \frac{1}{256} (\cos(9\theta) + \cos(7\theta) - 4 \cos(5\theta) - 4 \cos(3\theta) + 6 \cos(\theta)).$

Exercice 8

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n = 2 \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} 5^k 3^{n-2k} = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 5^k 3^{n-2k} \in 2\mathbb{N}.$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$.

- D'après la formule du binôme de Newton, on a $A_n = 2^n$ et $B_n = 0$.
- En séparant les indices pairs et impairs, on a : $2^n = A_n + B_n = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}$ et $2^n = A_n - B_n = 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1}$. Donc $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$