

Feuille de TD n° 6

Applications

Exercice 1

Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux parties de E .

1. Montrer que si $A \subset B$ alors $f(A) \subset f(B)$.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. Donner un exemple où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

Exercice 2

Soit $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = f$.

1. Montrer que si f est injective alors $f = \text{Id}_E$.
2. Montrer que si f est surjective alors $f = \text{Id}_E$.
3. Donner un exemple où $f \neq \text{Id}_E$.

Exercice 3

Donner le domaine de définition de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)}.$$

Exercice 4

Déterminer chacun des ensembles suivants :

$$E_1 = \cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right)$$

$$E_2 = \exp(\mathbb{R}_+)$$

$$E_3 = f([1, 2])$$

$$E_4 = f(]-1, 0]) \quad \text{où} \quad f : x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2}$$

$$E_5 = g(\{0\} \times \mathbb{R})$$

$$E_6 = g(\mathbb{R}^2) \quad \text{où} \quad g : (x, y) \mapsto (x + y, xy)$$

$$E_7 = h(\mathbb{U} \setminus \{-1\})$$

$$E_8 = (i\mathbb{R}) \quad \text{où} \quad h : z \mapsto \frac{z - 1}{z + 1}$$

Exercice 5

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives et bijectives.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x$$

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$$

$$f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, x + y) \quad f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 4y)$$

$$f_5 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto e^z$$

$$f_6 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^2$$

Exercice 6

Montrer que les applications suivantes sont bijectives et déterminer leur bijection réciproque.

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5$$

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, x \mapsto 3e^{2x-1}$$

$$f_4 : \mathbb{C} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto \frac{z - 2}{z - 1}$$

$$f_5 : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$$

$$f_6 : \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \rightarrow [-1, 0], x \mapsto 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$