Corrigé de la feuille de TD n° 6

Sommes et produits

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\sum_{k=n}^{2n} k^3 = \sum_{k=1}^{2n} k^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left(\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = \frac{3n^2(5n^2+6n+1)}{4}.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$$\prod_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = e^{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n}} = e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k} = e^{(n+1)/2}.$$

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$.
2. $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{3}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\ln(k+3) - \ln(k)\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}\right)$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\sin\left((2k+1)\frac{\theta}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sin\left((2k+1)\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos\left((2k+2)\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left((2k)\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\Big[\cos(k\theta) - \cos\left((k+1)\theta\right)\Big] \\
&= \frac{1-\cos((n+1)\theta)}{2}.
\end{aligned}$$

4. $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$.
5. $\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \prod_{k=1}^n \frac{k(k+2)}{(k+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}(i+j) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(i+j) = \sum_{i=1}^n\left(ni + \frac{n(n+1)}{2}\right) = n^2(n+1)$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j) = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^j(i+j) = \sum_{j=1}^n\left(\frac{j(j+1)}{2} + j^2\right) = \frac{n(n+1)^2}{2}$.
2. $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} 2^{i+j} = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 2^{i+j} = \sum_{i=1}^n 2^i \sum_{j=1}^n 2^j = 4(2^n-1)^2$ et $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 2^{i+j} = \sum_{j=1}^n\left(2^j\sum_{i=1}^j 2^i\right) = 2\sum_{j=1}^n(4^j - 2^j) = \frac{8}{3}4^n - 2^{n+2} + \frac{4}{3}$.
3. $\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij = \prod_{i=1}^n\prod_{j=1}^n ij = \prod_{i=1}^n\left(i^n\prod_{j=1}^n j\right) = (n!)^n\left(\prod_{i=1}^n i\right)^n = (n!)^{2n}$ et $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sqrt{\prod_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} ij \times \prod_{k=1}^n k^2} = \sqrt{(n!)^{2n}\times(n!)^2} = (n!)^{n+1}$.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)x^k = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

Exercice 6

On fixe un entier $m \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Pascal, on peut démontrer par récurrence que $\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$ est vraie pour tout entier $n \geqslant m$.

Exercice 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1) En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, on a : $\cos(9\theta) = \cos^9(\theta) - 36\cos^7(\theta)\sin^2(\theta) + 126\cos^5(\theta)\sin^4(\theta) - 84\cos^3(\theta)\sin^6(\theta) + 9\cos(\theta)\sin^8(\theta)$ et $\sin(9\theta) = \sin^9(\theta) - 36\cos^2(\theta)\sin^7(\theta) + 126\cos^4(\theta)\sin^5(\theta) - 84\cos^6(\theta)\sin^3(\theta) + 9\cos^8(\theta)\sin(\theta)$.
2) D'après les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton, on a : $\cos^4(\theta)\sin^5(\theta) = \frac{1}{256}\left(\sin(9\theta) - \sin(7\theta) - 4\sin(5\theta) + 4\sin(3\theta) + 6\sin(\theta)\right)$ et $\cos^5(\theta)\sin^4(\theta) = \frac{1}{256}\left(\cos(9\theta) + \cos(7\theta) - 4\cos(5\theta) - 4\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)\right)$.

Exercice 8

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n = 2\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}5^k3^{n-2k} = 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}5^k3^{n-2k} \in 2\mathbb{N}.$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose $A_n = \sum_{k=0}^n\binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k=0}^n(-1)^k\binom{n}{k}$.

1. D'après la formule du binôme de Newton, on a $A_n = 2^n$ et $B_n = 0$.
2. En séparant les indices pairs et impairs, on a : $2^n = A_n + B_n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}$ et $2^n = A_n - B_n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}$. Donc $\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$.