Corrigé de la feuille de TD n° 7

Dénombrement

Exercice 1 (cardinal, réunion, complémentaire)

Un laboratoire de contrôle qualité effectue dix analyses différentes dans des industries agroalimentaires choisies au hasard parmi quatre.

1. On numérote les industries de 1 à 4. Dénombrer les répartitions possibles des dix analyses revient à compter le nombre de 10-listes de $\{1,2,3,4\}$ (avec répétition) : le premier élément de la liste correspond au numéro de l'industrie où est effectuée la première analyse, le deuxième élément correspond au numéro de celle où est effectué la deuxième analyse, etc. Il y a donc $\operatorname{card}(\{1,2,3,4\})^{10} = 4^{10} = 1048576$ répartitions possibles des analyses.
2. Soit E l'ensemble des répartitions pour lesquelles chacune des quatre industries est analysée au moins une fois. Le complémentaire de E est l'ensemble des répartitions pour lesquelles au moins une des industries n'est pas analysée. On a donc

$$\overline{E} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

où A_i désigne l'ensemble des répartitions pour lesquelles l'industrie numéro i n'est pas analysée. De plus :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =& \operatorname{card}(A_1) + \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) + \operatorname{card}(A_4)\\ &- \operatorname{card}(A_1 \cap A_2) - \operatorname{card}(A_1 \cap A_3) - \operatorname{card}(A_1 \cap A_4)\\ &- \operatorname{card}(A_2 \cap A_3) - \operatorname{card}(A_2 \cap A_4) - \operatorname{card}(A_3 \cap A_4)\\ &+ \operatorname{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \operatorname{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_4)\\ &+ \operatorname{card}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \operatorname{card}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)\\ &- \operatorname{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).\end{aligned}$$

Or on obtient en raisonnant comme pour la question précédente : $\operatorname{card}(A_i) = 3^{10}$ (nombre de 10-listes de $\{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$ qui contient 3 éléments), $\operatorname{card}(A_i \cap A_j) = 2^{10}$ (nombre de 10-listes de $\{1,2,3,4\} \setminus \{i,j\}$ qui contient 2 éléments), $\operatorname{card}(A_i \cap A_j \cap A_k) = 1$ (une seule 10-liste dans laquelle le seul élément de $\{1,2,3,4\} \setminus \{i,j,k\}$ est répété dix fois), et $\operatorname{card}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$. Finalement, on a :

$$\begin{aligned}\operatorname{card}(E) = 4^{10} - \operatorname{card}\left(\overline{E}\right) &= 4^{10} - \operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)\\ &= 4^{10} - (4 \times 3^{10} - 6 \times 2^{10} + 4 \times 1 - 0) = 818520.\end{aligned}$$

Exercice 2

Un anagramme d'un mot est un mot écrit avec les mêmes lettres dans un ordre différent.

1. Dénombrer les anagrammes du mot «BCPST» revient à compter le nombre de 5-listes sans répétition de $\{B,C,P,S,T\}$, c'est-à-dire le nombre de permutations d'un ensemble à cinq éléments. Il y a donc $5! = 120$ anagrammes.
2. Pour dénombrer les anagrammes du mot «CLASSE», on procède comme pour la question précédente sauf que chaque mot va être compté deux fois puisqu'il y a deux lettres «S». On obtient donc $\frac{6!}{2} = 310$ anagrammes.
3. Pour dénombrer les anagrammes du mot «PREPARATOIRE», on procède comme pour la question précédente. Il y a deux façons de permuter les deux lettres «P», $3! = 6$ façons de permuter les trois lettres «R», deux façons de permuter les deux lettres «E» et deux façons de permuter les deux lettres «A». On obtient donc $\frac{12!}{2\times6\times2\times2} = 9979200$ anagrammes.

Exercice 3

On pioche une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

1. On choisit 5 cartes parmi 32. On obtient $\binom{32}{5} = 201376$ mains différentes.
2. On choisit 3 cœurs parmi 8, puis 2 cartes parmi 32-8=24 cartes qui ne sont pas des cœurs. On obtient $\binom{8}{3} \times \binom{24}{2} = 15456$ mains contenant exactement 3 cœurs.
3. On considère deux cas (disjoints). 1^er^ cas : on pioche le roi de pique, alors on choisit en plus 1 pique parmi les 8-1=7 piques restants, 1 roi parmi les 4-1=3 rois restants, puis 2 cartes parmi les 32-1-7-3=21 cartes qui ne contiennent ni le roi de pique, ni les piques, ni les rois. 2^e^ cas : on ne pioche pas le roi de pique, alors on choisit 2 piques parmi les 8-1=7 piques sauf le roi de pique, 2 rois parmi les 4-1=3 rois sauf le roi de pique, puis 1 carte parmi les 32-1-7-3=21 cartes qui ne contiennent ni le roi de pique, ni les piques, ni les rois. Puisque les deux cas sont disjoints, on obtient $\binom{1}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{21}{2} + \binom{7}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{21}{1} = 5733$ mains contenant exactement deux piques et deux rois.
4. Soient A l'ensemble des mains contenant exactement deux trèfles et B l'ensemble des mains contenant exactement deux dames. On a $\operatorname{card}(A) = \binom{8}{2} \times \binom{24}{3} = 56672$ et $\operatorname{card}(B) = \binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19656$. Et puisque $A \cap B$ est l'ensemble des mains contenant exactement deux trèfles et deux dames, on a $\operatorname{card}(A \cap B) = 5733$ en raisonnant comme pour la question précédente. On obtient $\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B) = 70595$ mains contenant exactement deux trèfles ou deux dames.
5. Soit C l'ensemble des mains contenant au moins un valet. Puisque $\overline{C}$ est l'ensemble des mains ne contenant pas de valet, on a $\operatorname{card}(\overline{C}) = \binom{28}{5} = 98280$. On obtient $\operatorname{card}(C) = 201376 - \operatorname{card}(\overline{C}) = 103096$ mains contenant au moins un valet.

Exercice 4

37 filles et 11 garçons issus d'une même classe se retrouve quelques années plus tard pour créer une association d'anciens élèves. Dans ce but, ils souhaitent élire un bureau constitué d'un(e) président(e), d'un(e) secrétaire et d'un(e) trésorier(ère) (sans cumul de mandat).

1. Choisir un bureau revient à choisir une 3-liste sans répétition de l'ensemble des anciens élèves : la première personne de la liste correspond au président, la deuxième personne correspond au secrétaire et la troisième correspond au trésorier. Puisque l'ensemble des anciens élèves contient $37+11=48$ personnes, on obtient $\frac{48!}{(48-3)!}=103776$ choix possibles de bureau.
2. On considère deux cas (disjoints). 1^er^ cas : le bureau est constitué de trois garçons, alors on choisit une 3-liste sans répétition de l'ensemble des garçons. 2^e^ cas : le bureau est constitué de deux garçons et d'une fille, alors on choisit 1 siège du bureau parmi 3 qui est occupé par le choix de 1 fille parmi 37, puis on choisit une 2-liste sans répétition de l'ensemble des garçons pour occuper les deux derniers sièges du bureau. Puisque les deux cas sont disjoints, on obtient $\frac{11!}{(11-3)!}+\binom{3}{1}\times\binom{37}{1}\times\frac{11!}{(11-2)!}=13200$ choix possibles donnant plus de garçons que de filles dans le bureau.

Exercice 5

On souhaite ranger 42 livres différents dans une bibliothèque.

1. Dénombrer les façons de ranger 42 livres alignés sur une étagère revient à compter le nombre de 42-listes sans répétition de l'ensemble des livres, c'est-à-dire le nombre de permutations d'un ensemble à 42 éléments. Il y a donc $42!\approx 1,4\times 10^{51}$ façons de ranger les 42 livres alignés sur une étagère.
2. On note E l'ensemble des façons de ranger les 42 livres alignés sur deux étagères. Les livres sont divisés en deux groupes : ceux rangés sur la première étagère et ceux rangés sur la deuxième étagère. On note E_k l'ensemble des façons de ranger les 42 livres alignés sur deux étagères de telle sorte qu'il y ait k livres sur la première étagère (et donc $42-k$ livres sur la deuxième étagère). Clairement $k\in\{1,2,\dots,41\}$ (car chaque étagère doit présenter au moins un livre) et les $(E_k)_{k\in\{1,2,\dots,41\}}$ sont deux à deux disjoints. Par conséquent $\mathrm{card}(E)=\sum_{k=1}^{41}\mathrm{card}(E_k)$. De plus, dénombrer E_k revient tout d'abord à choisir k livres parmi les 42 livres, puis à choisir une façon de ranger k livres alignés sur la première étagère et une façon de ranger $42-k$ livres alignés sur la deuxième étagère. On obtient donc :
$$\begin{aligned}\mathrm{card}(E)&=\sum_{k=1}^{41}\left[\binom{42}{k}\times k!\times(42-k)!\right]\\&=\sum_{k=1}^{41}\frac{42!}{k!(42-k)!}k!(42-k)!\\&=\sum_{k=1}^{41}42!=42!\sum_{k=1}^{41}1=42!\times 41\approx 5,8\times 10^{52}.\end{aligned}$$
Une autre manière d'obtenir ce résultat est de compter le nombre de façons de ranger les 42 livres alignés (donc $42!$) puis de multiplier par le nombre de façons de diviser cet alignement en deux groupes alignés : le premier groupe à ranger sur la première étagère et le deuxième groupe à ranger sur la deuxième étagère. Puisqu'il y a 41 choix de couper l'alignement (entre deux livres), on retrouve $42!\times 41$.
3. On raisonne comme pour la question précédente en notant k le nombre de livres sur la première étagère et ℓ le nombre de livres sur la deuxième étagère (et donc $42-k-\ell$ livres sur la troisième étagère). On obtient donc :
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{40}\left[\binom{42}{k}\times k!\times\left(\sum_{\ell=1}^{42-k-1}\left[\binom{42-k}{\ell}\times\ell!\times(42-k-\ell)!\right]\right)\right]\\&=\sum_{k=1}^{40}\left[\frac{42!}{(42-k)!}\times\left(\sum_{\ell=1}^{41-k}(42-k)!\right)\right]\\&=\sum_{k=1}^{40}\left[42!\times(41-k)\right]=42!\sum_{i=1}^{40}i=42!\times\frac{40\times 41}{2}\approx 1,2\times 10^{54}.\end{aligned}$$
On peut également retrouver ce résultat en multipliant le nombre de façons de ranger les 42 livres alignés (donc $42!$) par le nombre de façons de diviser cet alignement en trois groupes, donc par $\binom{41}{2}=\frac{41\times 40}{2}$ (on choisit deux coupures différentes parmi les 41 possibles entre deux livres).
4. Dénombrer les façons de ranger 42 livres en vrac dans deux tiroirs revient à compter le nombre de 42-listes de $\{1,2\}$ (avec répétition) : le premier livre est rangé dans le premier tiroir si le premier élément de la liste est 1 et dans le deuxième tiroir si le deuxième élément de la liste est 2, le deuxième livre est rangé dans le premier tiroir si le deuxième élément de la liste est 1 et dans le deuxième tiroir si le deuxième élément de la liste est 2, etc. Il y a donc $\mathrm{card}(\{1,2\})^{42}=2^{42}\approx 4,4\times 10^{12}$ façons de ranger les 42 livres en vrac dans deux tiroirs.
Une autre manière d'obtenir ce résultat est de dénombrer le nombre d'applications de l'ensemble des livres vers l'ensemble des tiroirs : l'image d'un livre correspond au tiroir dans lequel il est rangé.
5. On note $n\in\{2,3,\dots,42\}$ le nombre de livres sur les étagères (et donc $42-n$ livres dans les tiroirs) et $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ le nombre de livres sur la première étagère (et donc $n-k$ livres sur la deuxième étagère). On obtient en raisonnant comme pour les questions précédentes :
$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{42}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\times k!\times(n-k)!\right)\times 2^{42-n}\right]\\&=\sum_{n=2}^{42}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}n!\right)\times 2^{42-n}\right]=\sum_{n=2}^{42}\left[\left(n!\sum_{k=1}^{n-1}1\right)\times 2^{42-n}\right]=\sum_{n=2}^{42}\left[n!(n-1)2^{42-n}\right]\end{aligned}$$
Un petit programme informatique donne environ $6,0\times 10^{52}$ façons de ranger les 42 livres avec une partie alignés sur deux étagères et le reste en vrac dans deux tiroirs.

Exercice 6

Un tournoi d'échecs oppose 42 participants. A chaque ronde (ou tour) du tournoi tous les joueurs s'affrontent deux à deux sur 21 échiquiers.

1. Chaque participant a exactement $42-1=41$ adversaires possibles. Un tournoi «toutes rondes» doit donc comporter 41 rondes pour que chaque participant affronte tous ses adversaires exactement une fois chacun.
2. A chaque ronde, il y a 21 parties jouées. Donc il y a $41\times 21=861$ parties jouées au total dans un tournoi «toutes rondes».
3. On commence par numéroter les échiquiers de 1 à 21. Pour l'échiquier numéro 1, on choisit 2 joueurs parmi les 42 participants. Pour l'échiquier numéro 2, on choisit 2 joueurs parmi les $42-2=40$ participants restants. Pour l'échiquier numéro 3, on choisit 2 joueurs parmi les $40-2=38$ participants restants, etc. Chaque appariement obtenu est compté autant de fois qu'il y a de façons de numéroter les échiquiers de 1 à 21, c'est-à-dire autant que le nombre de 21-listes (ou permutations) de l'ensemble des 21 échiquiers. On obtient donc :

$$\frac{\binom{42}{2}\times\binom{40}{2}\times\binom{38}{2}\times\cdots\times\binom{2}{2}}{21!}$$
$$=\frac{\frac{42!}{2!40!}\times\frac{40!}{2!38!}\times\frac{38!}{2!36!}\times\cdots\times\frac{2!}{2!0!}}{21!}$$
$$=\frac{\frac{42!}{(2!\times 2!\times 2!\times\cdots\times 2!)0!}}{21!}=\frac{42!}{2^{21}21!}.$$

Ce qui donne environ $1,3\times 10^{25}$ appariements possibles pour la première ronde.

Exercice 7

Lors d'une soirée réunissant $n\geqslant 1$ personnes, certains invités trinquent ensemble. Soit φ l'application qui à un invité associe le nombre de personnes avec qui il trinque. Soit E l'ensemble des invités. Clairement $\varphi : E\to\{0,1,2,\dots,n-1\}$ (car chaque invité ne peut pas trinquer avec lui-même). On suppose que chaque invité a trinqué avec un nombre différent de personnes (raisonnement par l'absurde), c'est-à-dire que l'application $\varphi : E\to\{0,1,2,\dots,n-1\}$ est injective. Or $\mathrm{card}(E)=n=\mathrm{card}(\{0,1,2,\dots,n-1\})$. Donc l'application $\varphi : E\to\{0,1,2,\dots,n-1\}$ est bijective. En particulier l'application $\varphi : E\to\{0,1,2,\dots,n-1\}$ est surjective. Par conséquent il existe un antécédent de 0 et un antécédent de $n-1$, c'est-à-dire un invité qui a trinqué avec personne et un invité qui a trinqué avec tout le monde (sauf lui-même). Ceci est absurde. On en déduit que l'application $\varphi : E\to\{0,1,2,\dots,n-1\}$ n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe deux invités qui ont trinqué avec le même nombre de personnes.