Corrigé de la feuille de TD n° 7

Applications

Exercice 1 (images directes)

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles. Soient A et B deux parties de E.

1. On suppose $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$. Par définition de $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Puisque $A \subset B$, on a $x \in B$. Ainsi $y = f(x)$ avec $x \in B$ donc $y \in f(B)$ par définition de $f(B)$. Et comme c'est vrai pour tout $y \in f(A)$, on en déduit que $f(A) \subset f(B)$.
2. Soit $y \in f(A\cup B)$. Par définition de $f(A\cup B)$, il existe $x \in A\cup B$ tel que $y = f(x)$. On distingue deux cas : $x \in A$ ou $x \in B$. Dans le premier cas, $y = f(x)$ avec $x \in A$ donc $y \in f(A) \subset f(A) \cup f(B)$ par définition de $f(A)$. Dans le deuxième cas, $y = f(x)$ avec $x \in B$ donc $y \in f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Dans tous les cas, $y \in f(A) \cup f(B)$ pour tout $y \in f(A \cup B)$ donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   Soit maintenant $y \in f(A) \cup f(B)$. On distingue deux cas : $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Dans le premier cas, par définition de $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. En particulier, $y = f(x)$ avec $x \in A \cup B$ car $A \subset A \cup B$ donc $y \in f(A \cup B)$ par définition de $f(A\cup B)$. Dans le deuxième cas, on montre de même que $y \in f(A\cup B)$ car $B \subset A \cup B$. Dans tous les cas, $y \in f(A \cup B)$ pour tout $y \in f(A) \cup f(B)$ donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   On en déduit l'égalité $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ par double inclusion.
3. Soit $y \in f(A\cap B)$. Par définition de $f(A\cap B)$, il existe $x \in A\cap B$ tel que $y = f(x)$. En particulier $y = f(x)$ avec $x \in A\cap B \subset A$ donc $y \in f(A)$ par définition de $f(A)$. On montre de même que $y \in f(B)$ car $A \cap B \subset B$. Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$ pour tout $y \in f(A \cap B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. On considère par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ et les intervalles $A = [0, 1]$, $B = [2, 3]$. Alors $f(A) = \{0\}$ et $f(B) = \{0\}$, donc $f(A) \cap f(B) = \{0\}$. Mais $A\cap B = \emptyset$ et donc $f(A\cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$. Par conséquent, $f(A\cap B) \neq f(A)\cap f(B)$ pour cet exemple.

Exercice 2

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$.

1. On suppose que f est injective. Soit $x \in E$. On a par hypothèse $f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x)$, donc $f(x)$ et x ont même image par f. Puisque f est injective, on en déduit que $f(x) = x$. Et comme c'est vrai pour tout $x \in E$, on obtient que $f = \mathrm{Id}_E$.
2. On suppose que f est surjective. Soit $y \in E$. Puisque f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors par hypothèse $f(y) = f(f(x)) = f \circ f(x) = f(x) = y$. Et comme c'est vrai pour tout $y \in E$, on obtient que $f = \mathrm{Id}_E$.
3. On considère par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(0) = 0 = f(x)$ et donc $f \circ f = f$. Mais $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 3

$f : x \mapsto \frac{1}{\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}$ peut s'écrire comme la composition $f : x \mapsto f_2 \circ f_1$ avec $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - x$ et $f_2 : y \mapsto \frac{1}{\ln(y)}$. $f_1(x)$ est bien définie pour $x^2 + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Donc le domaine de définition de f_1 est $\mathbb{R}$. $f_2(y)$ est bien définie pour $y > 0$ et $\ln(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 1$. Donc le domaine de définition de f_2 est $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Le domaine de définition de f est donc donné par

$$f_1^{-1}\left(]0, 1[\cup]1, +\infty[\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt{x^2 + 1} - x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\right\}.$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geqslant 0$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad \sqrt{x^2 + 1} - x = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + 1} = x + 1\\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = (x + 1)^2 \text{ et } x + 1 \geqslant 0\\ &\Leftrightarrow \quad x = 0 \text{ et } x \geqslant -1.\end{aligned}$$

Donc le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^\star$.

Exercice 4

On a :

$$\cos\left(\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \qquad \exp\left(\mathbb{R}_+\right) = [1, +\infty[$$

$$f([1, 2]) = \left[\frac{1}{7}, \frac{1}{3}\right] \qquad f(]-1, 0[) = \left]1, \frac{4}{3}\right]$$

$$g(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} \qquad g(\mathbb{R}^2) = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 | s^2 \geqslant 4p\}$$

$$h(\mathbb{U} \setminus \{-1\}) = i\mathbb{R} \qquad h(i\mathbb{R}) = \mathbb{U} \setminus \{1\}.$$

Exercice 5

On a :

— $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x$ est injective et surjective, donc bijective ;
— $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - x$ est surjective, mais pas injective, donc pas bijective ;
— $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, x + y)$ est injective et surjective, donc bijective ;
— $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 4y)$ n'est pas injective ni surjective, donc pas bijective ;
— $f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star, z \mapsto e^z$ est surjective, mais pas injective, donc pas bijective ;
— $f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$ est surjective, mais pas injective, donc pas bijective.

Exercice 6

On a :

— $f_1^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x-5}{2}$;

— $f_2^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \frac{2x+1}{x-2}$;

— $f_3^{-1} : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(x/3)+1}{2}$;

— $f_4^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}, z \mapsto \frac{z-2}{z-1}$;

— $f_5^{-1} : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star, z \mapsto 1/\overline{z}$;

— $f_6^{-1} : [-1, 0] \to \left[0, \frac{\pi}{6}\right], x \mapsto \arccos\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$.