Corrigé de la feuille de TD n° 8

Fonctions réelles d'une variable

Exercice 1

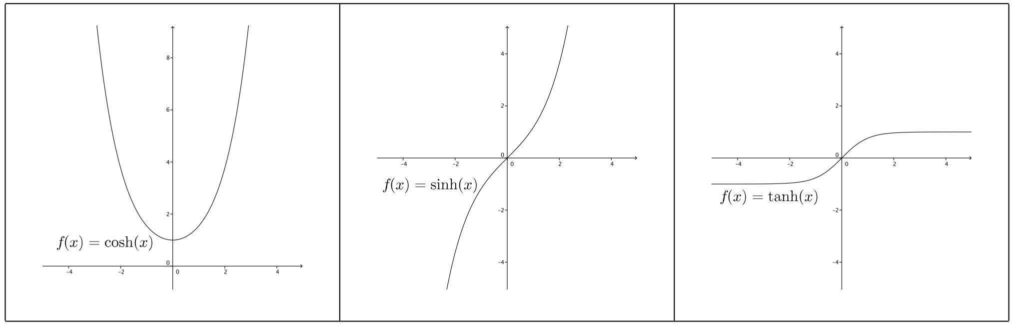
cosh et sinh sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh(x) > 0$ car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$, donc tanh est également définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions définies et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x), \quad \sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\text{et} \quad \tanh'(x) = \frac{\sinh'(x)\cosh(x) - \sinh(x)\cosh'(x)}{\cosh(x)^2} = 1 - \tanh(x)^2 = \frac{1}{\cosh(x)^2}$$

$$\left(\text{car} \quad \cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = \frac{e^{2x} + 2 - e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} = 1\right).$$

De plus, $\forall x \in \mathbb{R},\ \sinh(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$. Donc cosh est une fonction paire, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ puis strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. sinh et tanh sont des fonctions impaires, strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Enfin, $\cosh(0) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 1$.



Exercice 2

Les ensembles de définition sont :

1. $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$
2. $x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ est définie sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]\cup]3, +\infty[$
3. $x \mapsto \tan(3x)$ est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}] - \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}[$
4. $x \mapsto \ln(2\sin(x) - 1)$ est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi[$
5. $x \mapsto \sqrt{\arccos(x)}$ est définie sur $[-1, 1]$

Exercice 3

On peut démontrer chacune des inégalités par des études de fonctions.

1. On étudie la fonction $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, x \mapsto x - 1 - \ln(x)$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ pour tout $x > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, 1]$ puis strictement croissante sur $[1, +\infty[$. f admet un minimum en $x = 1$ de $f(1) = 1 - 1 - 0 = 0$, en particulier f est minorée par 0, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ x - 1 - \ln(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leqslant x - 1$.
2. On étudie la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) - x - 1$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \exp(x) - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ puis strictement croissante sur $[0, +\infty[$. f admet un minimum en $x = 0$ de $f(0) = 1 - 0 - 1 = 0$, en particulier f est minorée par 0, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \exp(x) - x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \exp(x) \geqslant x + 1$.
3. On a bien $0 \leqslant \sin(x)$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Ensuite on étudie la fonction $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, x \mapsto x - \sin(x)$. f est définie et dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ avec $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Donc f est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. f admet un minimum en $x = 0$ de $f(0) = 0 - 0 = 0$, en particulier f est minorée par 0, c'est-à-dire $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ x - \sin(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin(x) \leqslant x$. Pour tout $x \geqslant \frac{\pi}{2}$, on a $\sin(x) \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \Rightarrow |\sin(x)| \leqslant |x|$. Enfin pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $-x \in \mathbb{R}_+$ donc $|\sin(x)| = |-\sin(x)| = |\sin(-x)| \leqslant |-x| = |x|$.
4. On fixe $b \in \mathbb{R}_+^\star$ et on étudie la fonction $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, a \mapsto \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f'(a) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, b]$ puis strictement croissante sur $[b, +\infty[$. f admet un minimum en $a = b$ de $f(b) = b - b = 0$, en particulier f est minorée par 0, c'est-à-dire $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star,\ \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $b \in \mathbb{R}_+^\star$, on a démontré que $\forall (a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2,\ \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
5. On fixe $(b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$ et on étudie la fonction $f : \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}, a \mapsto \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} = \frac{a+b+c}{3} - (abc)^{1/3}$. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ avec $f'(a) = \frac{1}{3} - \frac{(bc)^{1/3}}{3} a^{-2/3} = \frac{a^{2/3} - (\sqrt{bc})^{2/3}}{3a^{2/3}}$. Donc f est strictement décroissante sur $]0, \sqrt{bc}]$ puis strictement croissante sur $[\sqrt{bc}, +\infty[$. f admet un minimum en $a = \sqrt{bc}$ de

$$\begin{aligned} f(\sqrt{bc}) &= \frac{\sqrt{bc} + b + c}{3} - ((\sqrt{bc})bc)^{1/3} = \frac{1}{3}\sqrt{bc} + \frac{b+c}{3} - (bc)^{(1/2+1)\times 1/3} \\ &= \frac{b+c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{bc} - \sqrt{bc} = \frac{2}{3}\left(\frac{b+c}{2} - \sqrt{bc}\right) \geqslant 0 \quad \text{(d'après la question 4).} \end{aligned}$$

   En particulier f est minorée par 0, c'est-à-dire $\forall a \in \mathbb{R}_+^\star,\ \frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$. Puisque cette inégalité est vraie pour tout $(b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^2$, on a bien démontré que $\forall (a, b, c) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^3,\ \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$.

Exercice 4

On a :

1. $x \mapsto \frac{x^3-2x}{x^4-5x^2+7}$ est impaire ;
2. $x \mapsto 3x+1$ n'est ni paire ni impaire ;
3. $x \mapsto \frac{e^x-1}{e^x+1}$ est impaire ;
4. $x \mapsto \ln(x-1)+\ln(x+1)$ n'est ni paire ni impaire (car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0) mais $x \mapsto \ln\left((x-1)(x+1)\right)$ est paire ;
5. $x \mapsto \sin(|x|)$ est paire.

Exercice 5

On a :

1. $x \mapsto |\sin(5x+2)|$ est périodique de période $\frac{\pi}{5}$;
2. $x \mapsto \exp\left(x - \lfloor x \rfloor\right)$ est périodique de période 1 ;
3. $x \mapsto \ln(3+\cos(2x+1))$ est périodique de période π.