

Fonctions réelles d'une variable

Exercice 1

Etudier les fonctions suivantes :

1. la fonction cosinus hyperbolique :

$$\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. la fonction sinus hyperbolique :

$$\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

3. la fonction tangente hyperbolique :

$$\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Exercice 2

Pour chacune des fonctions réelles suivantes, déterminer son ensemble de définition.

1. $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$
2. $x \mapsto \sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$
3. $x \mapsto \tan(3x)$
4. $x \mapsto \ln(2 \sin(x) - 1)$
5. $x \mapsto \sqrt{\arccos(x)}$

Exercice 3

Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x + 1$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], 0 \leq \sin(x) \leq x$, puis $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leq |x|$
4. $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
5. $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$

Exercice 4

Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est paire ou impaire ou ni l'un ni l'autre.

1. $x \mapsto \frac{x^3 - 2x}{x^4 - 5x^2 + 7}$.
2. $x \mapsto 3x + 1$.
3. $x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
4. $x \mapsto \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$.
5. $x \mapsto \sin(|x|)$.

Exercice 5

Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques et donner leur période.

1. $x \mapsto |\sin(5x + 2)|$.
2. $x \mapsto \exp(x - \lfloor x \rfloor)$.
3. $x \mapsto \ln(3 + \cos(2x + 1))$.