Corrigé des exercices du chapitre n° 14

Exercice 1. *Soient $\overrightarrow{e_1}=(a-1,a-8,a-7)$, $\overrightarrow{e_2}=(a-2,a-9,a-6)$ et $\overrightarrow{e_3}=(a-3,a-4,a-5)$ où $a\in\mathbb{R}$.*

1. *Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*

► Soit $\overrightarrow{v}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$. La famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si le système linéaire suivant admet une unique solution :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u}=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&a-2&a-3\\a-8&a-9&a-4\\a-7&a-6&a-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_1\\y_2-y_1\\y_3-y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&a-2&a-3\\-7&-7&-1\\-6&-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3\leftarrow L_3-L_2\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_1\\y_2-y_1\\y_3-y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&a-2&a-3\\-7&-7&-1\\1&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\leftrightarrow L_3\\\\L_3\leftrightarrow L_1\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_3-y_2\\y_2-y_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&3&-1\\-7&-7&-1\\a-1&a-2&a-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\L_2\leftarrow L_2+7L_1\\L_3\leftarrow L_3-(a-1)L_1\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_3-y_2\\-6y_2-y_1+7y_3\\y_1-(a-1)(y_3-y_2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&3&-1\\0&\boxed{14}&-8\\0&-2a+1&2a-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\L_3\leftarrow 14L_3-(-2a+1)L_2\end{matrix}\\
\iff&\begin{pmatrix}y_3-y_2\\-6y_2-y_1+7y_3*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&3&-1\\0&\boxed{14}&-8\\0&0&**\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où}\quad *&=14y_1-14(a-1)(y_3-y_2)-(-2a+1)(-6y_2-y_1+7y_3)\\
&=(14-2a+1)y_1+(14a-14-12a+6)y_2+(-14a+14+14a-7)y_3\\
&=(15-2a)y_1+(2a-8)y_2+7y_3\\
\text{et}\quad **&=14(2a-4)+8(-2a+1)=12a-48=\boxed{12(a-4)}.
\end{aligned}$$

Évitez le plus possible d'utiliser des pivots contenant un paramètre pour échelonner un système. Par contre, lorsqu'il n'y a plus le choix, n'oubliez pas de raisonner par disjonction de cas pour distinguer le cas où le pivot est nul.

1^er^ cas : $12(a-4)=0\iff\boxed{a=4}$. Dans ce cas, on a $(15-2a)y_1+(2a-8)y_2+7y_3=-y_1+7y_3$. On obtient alors un système linéaire échelonné de rang 2 qui admet aucune solution si $-y_1+7y_3\neq 0$ (et donc $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$) ou une infinité de solutions si $-y_1+7y_3=0$ (et donc $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ n'est pas libre). Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

2^e^ cas : $\boxed{a\neq 4}$. On obtient alors un système linéaire échelonné de rang maximal égal à 3 qui admet une unique solution. Donc la famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion. L'ensemble des valeurs du paramètre a pour lesquelles $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ est donc $\boxed{\mathbb{R}\setminus\{4\}}$.

Les calculs des seconds membres du système linéaire lors de l'échelonnage sont inutiles pour cette question. Il suffit de déterminer le rang de la matrice des coefficients en fonction du paramètre a. Mais ces calculs serviront à la question suivante. Pensez à lire toutes les questions pour gagner du temps.

2. *Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $a = 5$ et $a = 6$.*

▶ En reprenant les calculs de la question précédente pour $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ et $a = 5$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}\\
\iff &\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{14} & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -12-1+21 \\ 5+4+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} 12x_3 = 30 & \iff & x_3 = 5/2 \\ 14x_2 - 8x_3 = 8 & \iff & x_2 = \dfrac{8+20}{14} = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 & \iff & x_1 = 1 - 6 + \dfrac{5}{2} = -5/2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{v} = (1,2,3)$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ pour $a = 5$ sont égales à :

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \\ 5/2 \end{pmatrix}}.$$

De même, pour $a = 6$:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + x_3\overrightarrow{e_3}\\
\iff &\begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -1 \\ 0 & \boxed{14} & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ -12-1+21 \\ 3+8+21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 32 \end{pmatrix}\\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} 24x_3 = 32 & \iff & x_3 = 4/3 \\ 14x_2 - 8x_3 = 8 & \iff & x_2 = \dfrac{8+32/3}{14} = \dfrac{56}{42} = 4/3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 & \iff & x_1 = 1 - 4 + \dfrac{4}{3} = -5/3 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour $a = 6$:

$$\boxed{\operatorname{mat}_{(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})}(\overrightarrow{v}) = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}}.$$

Exercice 2. *Démontrer que trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux ne sont jamais coplanaires.*

▶ Soient $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ trois vecteurs non nuls orthogonaux deux à deux. Par l'absurde, on suppose que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont coplanaires. Donc il existe trois scalaires $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$ tels que $\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$. D'après les propriétés du produit scalaire, on a :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \underbrace{\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3}}_{=\overrightarrow{0}} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{0} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0\\
\text{et}\quad &\left\langle \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = \lambda_1\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle + \lambda_2 \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_2} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle}_{=\langle \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_2} \rangle = 0} + \lambda_3 \underbrace{\left\langle \overrightarrow{v_3} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle}_{=\langle \overrightarrow{v_1} | \overrightarrow{v_3} \rangle = 0} = \lambda_1\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle.
\end{aligned}$$

On en déduit par intégrité que $\lambda_1 = 0$ ou $\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0$. Or $\left\langle \overrightarrow{v_1} \middle| \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 0 \iff \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{0}$ ce qui est absurde car $\overrightarrow{v_1}$ est non nul. Par conséquent, $\lambda_1 = 0$. En raisonnant de même avec $\left\langle \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} \middle| \overrightarrow{v_2} \right\rangle$ et $\left\langle \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \lambda_3\overrightarrow{v_3} \middle| \overrightarrow{v_3} \right\rangle$, on obtient que $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Ce qui est absurde car $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0,0,0)$. On en déduit bien que $\boxed{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2} \text{ et } \overrightarrow{v_3} \text{ ne sont pas coplanaires}}$.

Exercice 3. *On fixe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et on considère les vecteurs de l'espace suivant :*

$$\overrightarrow{r_1}=\Big(\cos(\alpha),-\sin(\alpha)\cos(\beta),\sin(\alpha)\sin(\beta)\Big)\quad et\quad \overrightarrow{r_2}=\Big(\sin(\alpha),\cos(\alpha)\cos(\beta),-\cos(\alpha)\sin(\beta)\Big).$$

1. *Montrer que $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$ sont orthogonaux et calculer leur norme.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{r_1}\middle|\overrightarrow{r_2}\right\rangle &= \cos(\alpha)\sin(\alpha)-\sin(\alpha)\cos(\beta)\cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\cos(\alpha)\sin(\beta)\\ &=\cos(\alpha)\sin(\alpha)\Big(1-\cos^2(\beta)-\sin^2(\beta)\Big)\\ &=0\quad \text{car } \cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)=1 \text{ d'après le théorème de Pythagore.}\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{r_1} \text{ et } \overrightarrow{r_2} \text{ sont orthogonaux}}$. De plus :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{r_1}\right\| &= \sqrt{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\cos^2(\beta)+\sin^2(\alpha)\sin^2(\beta)}\\ &=\sqrt{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\Big(\underbrace{\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)}_{=1}\Big)}\\ &=\sqrt{\underbrace{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}_{=1}}\quad \text{d'après le théorème de Pythagore}\\ &=\boxed{1}\quad \text{d'après le théorème de Pythagore,}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et de même}\quad \left\|\overrightarrow{r_2}\right\| &= \sqrt{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\cos^2(\beta)+\cos^2(\alpha)\sin^2(\beta)}\\ &=\sqrt{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)\Big(\underbrace{\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta)}_{=1}\Big)}\\ &=\sqrt{\underbrace{\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}_{=1}}\quad \text{d'après le théorème de Pythagore}\\ &=\boxed{1}\quad \text{d'après le théorème de Pythagore.}\end{aligned}$$

2. *Trouver tous les vecteurs de l'espace $\overrightarrow{r_3}$ tels que $(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.*

▶ D'après les résultats de la question précédente, pour que $(\overrightarrow{r_1},\overrightarrow{r_2},\overrightarrow{r_3})$ soit une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, il suffit que :

$$\left\langle \overrightarrow{r_1}\middle|\overrightarrow{r_3}\right\rangle=0,\quad \left\langle \overrightarrow{r_2}\middle|\overrightarrow{r_3}\right\rangle=0\quad \text{et}\quad \left\|\overrightarrow{r_3}\right\|=1.$$

On raisonne par analyse-synthèse pour trouver les vecteurs $\overrightarrow{r_3}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ qui vérifient ces conditions.

Analyse. On veut que :

$$\begin{cases} x\cos(\alpha)-y\sin(\alpha)\cos(\beta)+z\sin(\alpha)\sin(\beta)=0\\ x\sin(\alpha)+y\cos(\alpha)\cos(\beta)-z\cos(\alpha)\sin(\beta)=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$$

Les deux premières conditions forment un système linéaire de deux équations à trois inconnues qu'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

1er cas : $\cos(\alpha)=0 \iff \alpha\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$. Alors le système linéaire devient :

$$\begin{pmatrix}0 & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta)\\ \sin(\alpha) & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \text{où } \sin(\alpha)=\pm1.$$

On obtient donc un système linéaire échelonné de rang 2 (car $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ ne peuvent pas s'annuler en même temps) qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\overrightarrow{r_3} = (x, y, z) = \Big(0, t\sin(\beta), t\cos(\beta)\Big) \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre quelconque.}$$

2e cas : $\cos(\alpha) \neq 0 \iff \alpha \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Alors le système linéaire devient après l'opération $L_2 \leftarrow \cos(\alpha)L_2 - \sin(\alpha)L_1$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ 0 & \Big(\underbrace{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}_{=1}\Big)\cos(\beta) & -\Big(\underbrace{\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)}_{=1}\Big)\sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ 0 & \cos(\beta) & -\sin(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'après le théorème de Pythagore.}$$

On obtient donc un système linéaire échelonné de rang 2 (car $\cos(\beta)$ et $\sin(\beta)$ ne peuvent pas s'annuler en même temps) qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\overrightarrow{r_3} = (x, y, z) = \Big(0, t\sin(\beta), t\cos(\beta)\Big) \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \text{ est un paramètre quelconque.}$$

Utilisez les résultats de la question précédente pour vérifier la cohérence : dans les deux cas, on doit obtenir une infinité de solutions qui dépendent d'un seul paramètre, qui correspondent aux vecteurs directeurs d'une droite de l'espace de vecteurs normaux $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$.

Conclusion. On obtient les mêmes solutions dans les deux cas. En injectant leur forme dans la troisième condition, on obtient :

$$\begin{aligned} & 0^2 + t^2\sin^2(\beta) + t^2\cos^2(\beta) = 1 \\ \iff & t^2\Big(\underbrace{\sin^2(\beta)+\cos^2(\beta)}_{=1}\Big) = 1 \\ \iff & t^2 = 1 \quad \text{d'après le théorème de Pythagore} \\ \iff & t = -1 \quad \text{ou} \quad t = 1. \end{aligned}$$

Synthèse. D'après les calculs de l'analyse, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{r_3} \in \mathbb{R}^3$ tels que $(\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}, \overrightarrow{r_3})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sont :

$$\boxed{\Big(0, -\sin(\beta), -\cos(\beta)\Big)} \quad \text{et} \quad \boxed{\Big(0, \sin(\beta), \cos(\beta)\Big)}.$$

Exercice 4. *Soient $ABCD$ un parallélogramme d'un plan affine muni d'un repère orthonormé, c'est-à-dire un quadruplet de points (A, B, C, D) deux à deux distincts et tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Montrer que la somme des carrés des quatre côtés est égale à la somme des carrés des deux diagonales, c'est-à-dire :*

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2.$$

► On a :

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BD}\right\|^2 \\ &= \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}\right\|^2 \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{BC} \right\rangle + \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 + \Big\| \underbrace{\overrightarrow{BA}}_{=\overrightarrow{CD}} \Big\|^2 + 2\underbrace{\left\langle \overrightarrow{BA} \middle| \overrightarrow{AD} \right\rangle}_{=-\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{AD} \right\rangle} + \underbrace{\left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2}_{=\left\|\overrightarrow{DA}\right\|^2} \quad \text{par propriété de la norme} \\ &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 + 2\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} \right\rangle \quad \text{par propriété du produit scalaire.} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} - \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles} \\ &= \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \quad \text{par hypothèse de l'énoncé.}\end{aligned}$$

N'hésitez pas à faire des petits schémas pour vous aider dans vos raisonnements.

On en déduit que $\left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{AB} \middle| \overrightarrow{0} \right\rangle = 0$ et par conséquent :

$$\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}.$$

Exercice 5. *On considère les points $A(3,7)$, $B(-5,3)$ et $C(-2,-8)$.*

1. *Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice au segment $[AB]$, c'est-à-dire la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.*

   ▶ Puisque $\overrightarrow{AB} = (-5-3)\overrightarrow{i} + (3-7)\overrightarrow{j} = -8\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal de la médiatrice au segment $[AB]$, une équation cartésienne de cette médiatrice est de la forme :

   $$-8x - 4y + c = 0 \quad \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

   De plus, cette médiatrice passe par le milieu $I(\frac{3-5}{2} = -1, \frac{7+3}{2} = 5)$ de $[AB]$. Donc :

   $$-8 \times (-1) - 4 \times 5 + c = 0 \iff c = 12.$$

   On en déduit qu'une équation cartésienne de la médiatrice à $[AB]$ est de la forme :

   $$\boxed{-8x - 4y + 12 = 0}.$$

2. *Déterminer des équations cartésiennes des médiatrices de $[AC]$ et $[BC]$.*

   ▶ On raisonne comme à la question précédente. $\overrightarrow{AC} = -5\overrightarrow{i} - 15\overrightarrow{j}$ donc une équation cartésienne de la médiatrice à $[AC]$ est de la forme :

   $$-5x - 15y + d = 0$$

   où $d \in \mathbb{R}$ est une constante vérifiant :

   $$-5 \times \frac{1}{2} - 15 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + d = 0 \iff d = -5.$$

   Par conséquent, une équation cartésienne de la médiatrice à $[AC]$ est de la forme :

   $$\boxed{-5x - 15y - 5 = 0}.$$

   De même, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{i} - 11\overrightarrow{j}$ donc une équation cartésienne de la médiatrice à $[BC]$ est de la forme :

   $$3x - 11y + e = 0$$

   où $e \in \mathbb{R}$ est une constante vérifiant :

   $$3 \times \left(-\frac{7}{2}\right) - 11 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + e = 0 \iff e = -17.$$

   Par conséquent, une équation cartésienne de la médiatrice à $[BC]$ est de la forme :

   $$\boxed{3x - 11y - 17 = 0}.$$

3. *En échelonnant le système linéaire formé par les trois équations cartésiennes obtenues précédemment, justifier que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes.*

▶ On obtient à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -8x-4y+12=0 \\ -5x-15y-5=0 \\ 3x-11y-17=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -15 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ -5 & -15 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 5 \\ 17 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ 0 & \boxed{-200} \\ 0 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 200 \\ -100 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ 0 & \boxed{-200} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -39 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 avec une équation auxiliaire compatible qui admet une unique solution. On en déduit que l'intersection des trois droites dont les équations cartésiennes forment le système linéaire contient un unique point, c'est-à-dire que $\boxed{\text{les trois médiatrices du triangle } ABC \text{ sont concourantes}}$.

4. *Déterminer les coordonnées du centre du cercle circonscrit à ABC, c'est-à-dire du point de concourance des trois médiatrices.*

▶ En reprenant les calculs de la question précédente, l'unique solution du système linéaire est :

$$\begin{cases} -200y = 200 \iff y=-1 \\ -x+37y=-39 \iff x = 39-37=2 \end{cases}$$

Par conséquent, les coordonnées du centre du cercle circonscrit sont égales à $\boxed{(2,-1)}$.

Exercice 6. *On considère les mêmes points que l'exercice précédent. En vous inspirant de la méthode utilisée, justifier que les trois hauteurs de ABC (c'est-à-dire les droites passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé) sont concourantes, puis déterminer les coordonnées du point de concourance, appelé l'orthocentre de ABC.*

▶ Puisque $\overrightarrow{AB} = -8\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$ est un vecteur normal à la hauteur de ABC passant par C, une équation cartésienne de cette hauteur est de la forme :

$$-8x-4y+c'=0 \quad \text{où } c' \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

De plus, cette hauteur passe par $C(-2,-8)$. Donc :

$$-8\times(-2)-4\times(-8)+c'=0 \iff c'=-48.$$

Par conséquent, une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par C est de la forme :

$$-8x-4y-48=0.$$

De même, une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par B est de la forme :

$$-5x-15y+d'=0$$

où $d' \in \mathbb{R}$ est une constante vérifiant :

$$-5\times(-5)-15\times 3+d'=0 \iff d'=20.$$

Par conséquent, une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par B est de la forme :

$$-5x - 15y + 20 = 0.$$

De même, une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par A est de la forme :

$$3x - 11y + e' = 0$$

où $e' \in \mathbb{R}$ est une constante vérifiant :

$$3 \times 3 - 11 \times 7 + e' = 0 \iff e' = 68.$$

Par conséquent, une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par B est de la forme :

$$3x - 11y + 68 = 0.$$

L'intersection des trois hauteurs de ABC est donc l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} -8x - 4y - 48 = 0 \\ -5x - 15y + 20 = 0 \\ 3x - 11y + 68 = 0 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -5 & -15 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ -20 \\ -68 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ -5 & -15 \\ 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ -20 \\ -68 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ 0 & \boxed{-200} \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ -800 \\ 400 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 37 \\ 0 & \boxed{-200} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ -800 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 avec une équation auxiliaire compatible qui admet une unique solution. On en déduit que $\boxed{\text{les trois hauteurs de } ABC \text{ sont concourantes}}$. De plus, l'unique solution est :

$$\begin{cases} -200y = -800 \iff y = 4 \\ -x + 37y = 156 \iff x = -156 + 148 = -8 \end{cases}$$

Par conséquent, les coordonnées de l'orthocentre sont égales à $\boxed{(-8, 4)}$.

Exercice 7. *Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$ trois points non alignés. Justifier que les trois médianes du triangle ABC (c'est-à-dire les droites passant par un sommet et le milieu du côté opposé) sont concourantes, puis déterminer les coordonnées du point de concourance, appelé le centre de gravité de ABC, en fonction des coordonnées de A, B et C.*

▶ On note $I\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ le milieu du côté $[AB]$. Le vecteur $\overrightarrow{CI} = \frac{x_A+x_B-2x_C}{2}\overrightarrow{i} + \frac{y_A+y_B-2y_C}{2}\overrightarrow{j}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n} = (y_A + y_B - 2y_C)\overrightarrow{i} - (x_A + x_B - 2x_C)\overrightarrow{j}$ car :

$$\left\langle \overrightarrow{CI} \middle| \overrightarrow{n} \right\rangle = \left(\frac{x_A + x_B - 2x_C}{2}\right)(y_A + y_B - 2y_C) - \left(\frac{y_A + y_B - 2y_C}{2}\right)(x_A + x_B - 2x_C) = 0.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à la médiane (CI) de ABC passant par C et qu'une équation cartésienne de cette médiane est de la forme :

$$(y_A + y_B - 2y_C)x - (x_A + x_B - 2x_C)y + c = 0$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante vérifiant :

$$\begin{aligned}
&(y_A + y_B - 2y_C)x_C - (x_A + x_B - 2x_C)y_C + c = 0 \\
\iff &c = (x_A + x_B - 2x_C)y_C - (y_A + y_B - 2y_C)x_C = (x_A + x_B)y_C - (y_A + y_B)x_C.
\end{aligned}$$

Par conséquent, une équation cartésienne de la médiane de ABC passant par C est de la forme :

$$(y_A + y_B - 2y_C)x - (x_A + x_B - 2x_C)y + (x_A + x_B)y_C - (y_A + y_B)x_C = 0.$$

En raisonnant de même, une équation cartésienne de la médiane de ABC passant par B est de la forme :

$$(y_A + y_C - 2y_B)x - (x_A + x_C - 2x_B)y + (x_A + x_C)y_B - (y_A + y_C)x_B = 0,$$

et une équation cartésienne de la médiane de ABC passant par A est de la forme :

$$(y_B + y_C - 2y_A)x - (x_B + x_C - 2x_A)y + (x_B + x_C)y_A - (y_B + y_C)x_A = 0.$$

Inutile de perdre du temps à détailler des calculs similaires. Par contre, pensez à simplifier vos expressions pour aller plus vite.

L'intersection des trois médianes de ABC est donc l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} (y_A + y_B - 2y_C)x - (x_A + x_B - 2x_C)y + (x_A + x_B)y_C - (y_A + y_B)x_C = 0 \\ (y_A + y_C - 2y_B)x - (x_A + x_C - 2x_B)y + (x_A + x_C)y_B - (y_A + y_C)x_B = 0 \\ (y_B + y_C - 2y_A)x - (x_B + x_C - 2x_A)y + (x_B + x_C)y_A - (y_B + y_C)x_A = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} y_A + y_B - 2y_C & -(x_A + x_B - 2x_C) \\ y_A + y_C - 2y_B & -(x_A + x_C - 2x_B) \\ y_B + y_C - 2y_A & -(x_B + x_C - 2x_A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C \\ (y_A + y_C)x_B - (x_A + x_C)y_B \\ (y_B + y_C)x_A - (x_B + x_C)y_A \end{pmatrix}$$

Si tous les coefficients de la première colonne sont nuls, on remarque que :

$$\begin{cases} y_A + y_B - 2y_C = 0 \\ y_A + y_C - 2y_B = 0 \\ y_B + y_C - 2y_A = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad y_A = y_B = y_C$$

car par exemple $L_1 - L_2$ donne $y_A + y_B - 2y_C - y_A - y_C + 2y_B = 3(y_B - y_C) = 0 \iff y_B = y_C$ et de même pour $y_A = y_B$ et $y_A = y_C$. Or $y_A = y_B = y_C$ signifierait que A, B et C sont alignés sur une droite horizontale ce qui est absurde par hypothèse de l'énoncé. On en déduit qu'au moins l'un des trois coefficients de la première colonne est non nul. Quitte à échanger les noms des points A, B et C, on peut donc supposer que $y_A + y_B - 2y_C \neq 0$ et utiliser ce coefficient comme premier pivot pour échelonner le système linéaire. À l'aide des opérations $L_2 \leftarrow (y_A + y_B - 2y_C)L_2 - (y_A + y_C - 2y_B)L_1$ et $L_3 \leftarrow (y_A + y_B - 2y_C)L_3 - (y_B + y_C - 2y_A)L_1$, on obtient le système linéaire équivalent :

$$\begin{pmatrix} \boxed{y_A + y_B - 2y_C} & -(x_A + x_B - 2x_C) \\ 0 & * \\ 0 & ** \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C \\ *** \\ **** \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad * &= -(y_A + y_B - 2y_C)(x_A + x_C - 2x_B) + (y_A + y_C - 2y_B)(x_A + x_B - 2x_C) \\ &= -3y_Ax_C + 3y_Ax_B - 3y_Bx_A + 3y_Bx_C + 3y_Cx_A - 3y_Cx_B \\ &= 3\Big[-x_Ay_B + x_Ay_C + x_By_A - x_By_C - x_Cy_A + x_Cy_B \Big], \\ \text{et} \quad ** &= -(y_A + y_B - 2y_C)(x_B + x_C - 2x_A) + (y_B + y_C - 2y_A)(x_A + x_B - 2x_C) \\ &= -3y_Ax_B + 3y_Ax_C - 3y_Bx_C + 3y_Bx_A + 3y_Cx_B - 3y_Cx_A \\ &= -* \,. \end{aligned}$$

Or, puisque A, B et C ne sont pas alignés, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{i} + (y_B - y_A)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)\overrightarrow{i} + (y_C - y_A)\overrightarrow{j}$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que :

$$\underbrace{(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)}_{=x_By_C - x_By_A - x_Ay_C - x_Cy_B + x_Ay_B + x_Cy_A = -*/3} \neq 0.$$

Par conséquent, $* \neq 0$ et on peut utiliser ce coefficient comme deuxième pivot pour échelonner le système linéaire. À l'aide de l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient le système linéaire équivalent :

$$\begin{pmatrix} \boxed{y_A + y_B - 2y_C} & -(x_A + x_B - 2x_C) \\ 0 & \boxed{*} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C \\ *** \\ ****+*** \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad ****+*** =& (y_A + y_B - 2y_C)\Big((y_B + y_C)x_A - (x_B + x_C)y_A\Big) \\
& - (y_B + y_C - 2y_A)\Big((y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C\Big) \\
& + (y_A + y_B - 2y_C)\Big((y_A + y_C)x_B - (x_A + x_C)y_B\Big) \\
& - (y_A + y_C - 2y_B)\Big((y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C\Big) \\
=& (y_A + y_B - 2y_C)\Big[y_C x_A - x_C y_A + y_C x_B - x_C y_B\Big] \\
& - \Big[\underbrace{-y_B + 2y_C - y_A}_{=-(y_A+y_B-2y_C)}\Big]\Big(\underbrace{(y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C}_{=y_A x_C + y_B x_C - x_A y_C - x_B y_C}\Big) \\
=& (y_A + y_B - 2y_C) \times 0 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient donc un système linéaire échelonné de rang égal à 2 avec une équation auxiliaire compatible qui admet une unique solution. On en déduit que $\boxed{\text{les trois médianes de } ABC \text{ sont concourantes}}$. De plus :

$$\begin{aligned}
*** =& (y_A + y_B - 2y_C)\Big((y_A + y_C)x_B - (x_A + x_C)y_B\Big) \\
& - (y_A + y_C - 2y_B)\Big((y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C\Big) \\
=& y_A\Big(y_A x_B + 2y_C x_B - x_A y_B - 2x_C y_B - y_A x_C + x_A y_C\Big) \\
& + y_B\Big(y_A x_B - y_C x_B - x_A y_B + x_C y_B + 2y_A x_C - 2x_A y_C\Big) \\
& \quad + y_C\Big(-2y_A x_B - y_C x_B + 2x_A y_B + x_C y_B - y_A x_C + x_A y_C\Big) \\
=& y_A\Big(y_A x_B - x_A y_B - y_A x_C + x_A y_C\Big) \\
& + y_B\Big(y_A x_B - y_C x_B - x_A y_B + x_C y_B\Big) \\
& \quad + y_C\Big(-y_C x_B + x_C y_B - y_A x_C + x_A y_C\Big) \\
=& y_A\Big(\underbrace{-x_A y_B + x_A y_C + x_B y_A - x_C y_A - x_B y_C + x_C y_B}_{=*/3}\Big) + x_B y_A y_C - x_C y_A y_B \\
& + y_B\Big(\underbrace{-x_A y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_C y_B + x_A y_C - x_C y_A}_{=*/3}\Big) - x_A y_B y_C + x_C y_A y_B \\
& \quad + y_C\Big(\underbrace{x_A y_C - x_B y_C - x_C y_A + x_C y_B - x_A y_B + x_B y_A}_{=*/3}\Big) + x_A y_B y_C - x_B y_A y_C \\
=& (y_A + y_B + y_C)\frac{*}{3}.
\end{aligned}$$

Soyez extrêmement bien organisé pour mener ce type de calcul. Regroupez les termes similaires, sans en oublier, et faites apparaître les expressions déjà utilisées (ici $*$) afin de simplifier.

Ainsi, l'unique solution du système linéaire est :

$$\begin{cases} *y = (y_A + y_B + y_C)\dfrac{*}{3} \iff y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ (y_A + y_B - 2y_C)x - (x_A + x_B - 2x_C)y = (y_A + y_B)x_C - (x_A + x_B)y_C \\ \iff (y_A + y_B - 2y_C)x = -x_A y_C - x_B y_C + x_C y_A + x_C y_B \\ \qquad + \frac{1}{3}x_A(y_A + y_B + y_C) + \frac{1}{3}x_B(y_A + y_B + y_C) - \frac{2}{3}x_C(y_A + y_B + y_C) \\ \qquad = \frac{1}{3}x_A(y_A + y_B - 2y_C) + \frac{1}{3}x_B(y_A + y_B - 2y_C) + \frac{1}{3}x_C(y_A + y_B - 2y_C) \\ \qquad = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)(y_A + y_B - 2y_C) \\ \iff x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \end{cases}$$

Par conséquent, les coordonnées du centre de gravité sont égales à $\boxed{\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)}$.

On reconnaît la moyenne des coordonnées des sommets du triangle ABC. Le centre de gravité est donc une généralisation à trois points du milieu de deux points.

Exercice 8. *On considère les points $A(3, -2)$, $B(-5, 4)$ et $C(3, 4)$. Déterminer une équation cartésienne du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est-à-dire du cercle passant par les trois sommets de ABC.*

▶ On cherche une équation cartésienne de la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ sont trois constantes à déterminer.}$$

On raisonne par analyse-synthèse pour trouver les constantes a, b et c.
Analyse. On veut que le cercle passe par $A(3, -2)$ donc que :

$$9 + 4 + 3a - 2b + c = 0 \iff 3a - 2b + c = -13.$$

De même, pour que le cercle passe par $B(-5, 4)$ et $C(3, 4)$, on obtient les conditions nécessaires suivantes :

$$\begin{aligned} 25 + 16 - 5a + 4b + c = 0 &\iff -5a + 4b + c = -41 \\ 9 + 16 + 3a + 4b + c = 0 &\iff 3a + 4b + c = -25 \end{aligned}$$

Il suffit donc de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} c + 3a - 2b = -13 \\ c - 5a + 4b = -41 \\ c + 3a + 4b = -25 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 \\ 1 & -5 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -41 \\ -25 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & \boxed{-8} & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -28 \\ -12 \end{pmatrix}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal égal à 3 qui admet une unique solution égale à :

$$\begin{cases} 6b = -12 \iff b = -2 \\ -8a + 6b = -28 \iff a = \dfrac{28 + 6b}{8} = 2 \\ c + 3a - 2b = -13 \iff c = -13 - 3a + 2b = -23 \end{cases}$$

Synthèse. D'après les calculs de l'analyse, une équation cartésienne de cercle circonscrit au triangle ABC est :

$$\boxed{x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0}.$$

Exercice 9. *Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et des coordonnées de A et B.*

► On note $M(x, y)$ les coordonnées du point M dans le repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On a $\overrightarrow{MA} = (x_A - x)\overrightarrow{i} + (y_A - y)\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{MB} = (x_B - x)\overrightarrow{i} + (y_B - y)\overrightarrow{j}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} =& (x_A - x)(x_B - x) + (y_A - y)(y_B - y) \\ =& x_Ax_B - (x_A + x_B)x + x^2 + y_Ay_B - (y_A + y_B)y + y^2 \\ =& x^2 - 2\left(\tfrac{x_A+x_B}{2}\right)x + \left(\tfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 \\ &\quad + y^2 - 2\left(\tfrac{y_A+y_B}{2}\right)y + \left(\tfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 \\ &\qquad + x_Ax_B + y_Ay_B \\ =& \left(x - \tfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(x_A^2 + 2x_Ax_B + x_B^2 + y_A^2 + 2y_Ay_B + y_B^2 - 4x_Ax_B - 4y_Ay_B\right) \\ =& \left(x - \tfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\Big(\underbrace{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}_{=\|\overrightarrow{BA}\|^2}\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda \iff \left(x - \tfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \tfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 = \lambda + \frac{1}{4}AB^2.$$

On reconnaît une équation cartésienne qui dépend des valeurs du paramètre λ.
<u>1^{er} cas</u> : $\lambda + \frac{1}{4}AB^2 < 0 \iff \lambda < -AB^2/4$. Alors l'équation cartésienne n'a pas de solutions, donc l'ensemble est vide.
<u>2^e cas</u> : $\lambda + \frac{1}{4}AB^2 = 0 \iff \lambda = -AB^2/4$. Alors l'équation cartésienne admet une unique solution $(x, y) = \left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, donc l'ensemble est le singleton contenant le milieu du segment $[AB]$.
<u>3^e cas</u> : $\lambda + \frac{1}{4}AB^2 > 0 \iff \lambda > -AB^2/4$. Alors on reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle de centre $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, c'est-à-dire le milieu du segment $[AB]$, et de rayon $\sqrt{\lambda + \frac{1}{4}AB^2}$.
Finalement :

$$\boxed{\left\{M \mid \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda\right\} = \begin{cases} \emptyset \text{ si } \lambda < -AB^2/4 \\ \left\{\text{milieu de } [AB]\right\} \text{ si } \lambda = -AB^2/4 \\ \text{le cercle de centre le milieu de } [AB] \text{ et de rayon } \sqrt{\lambda + \frac{1}{4}AB^2} \text{ sinon}\end{cases}}.$$

En particulier pour $\lambda = 0$ on reconnaît le cercle de diamètre $[AB]$ car son rayon est égal à $\sqrt{AB^2/4} = AB/2$. Autrement dit, l'ensemble des points M tels que le triangle AMB est rectangle en M (car $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux) est le cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 10. *On considère les points $A(-1, 4, 1)$ et $B(3, 0, 5)$. Déterminer une représentation paramétrique du plan Π perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le milieu du segment $[AB]$.*

► Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont égales à $(1, 2, 3)$. On raisonne par analyse-synthèse pour chercher deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan Π.
<u>Analyse</u>. Soit $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ un vecteur directeur de Π. Puisque le plan Π est perpendiculaire à la droite (AB), les vecteurs $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. On en déduit que :

$$4\alpha - 4\beta + 4\gamma = 0 \quad \text{donc} \quad \alpha - \beta + \gamma = 0.$$

La relation est par exemple vérifiée pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 0)$ ou pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 1, 1)$.
Synthèse. On pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{u}' = \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. D'après les calculs de l'analyse, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont orthogonaux à $\overrightarrow{AB}$ et donc des vecteurs directeurs de Π. De plus :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Par conséquent, les vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ sont non colinéaires. Finalement, une représentation paramétrique du plan Π est :

$$\boxed{\Pi : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t + t' \\ z = 3 + t' \end{cases}, (t, t') \in \mathbb{R}^2.}$$

Exercice 11. *Déterminer des équations cartésiennes du plan Π de l'exercice 10 et du plan (ABC) de l'exemple précédent l'exercice 10 (page 19).*

► Puisque le plan Π est perpendiculaire à la droite (AB), $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k}$ est un vecteur normal à Π. Une équation cartésienne de Π est donc de la forme :

$$4x - 4y + 4z + d = 0 \quad \text{où } d \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

De plus, Π passe par le milieu $I(1, 2, 3)$ de $[AB]$. Donc :

$$4 - 8 + 12 + d = 0 \iff d = -8.$$

On en déduit qu'une équation cartésienne de Π est de la forme :

$$\boxed{\Pi : 4x - 4y + 4z - 8 = 0}.$$

Pour le plan (ABC) de l'exemple précédent l'exercice 10, passant par les points $A(1, 2, -3)$, $B(4, -5, 6)$ et $C(-7, 8, 9)$, on commence par chercher un vecteur normal par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal du plan (ABC). Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AC} = -8\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 12\overrightarrow{k}$. Donc on veut que :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} 3a - 7b + 9c = 0 \\ -8a + 6b + 12c = 0 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} 3 & -7 & 9 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -15 & 39 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 8L_1 \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -15 & 39 \\ 0 & \boxed{-114} & 324 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} -114b + 324c = 0 \iff b = \dfrac{54}{19}c \\ a - 15b + 39c = 0 \iff a = \left(\dfrac{810}{19} - 39\right)c = \dfrac{69}{19}c \end{cases}, \text{où } c \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

Synthèse. On pose $\overrightarrow{n} = 69\overrightarrow{i} + 54\overrightarrow{j} + 19\overrightarrow{k}$. D'après les calculs de l'analyse (en posant $c = 19$), $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) qui admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$69x + 54y + 19z + d' = 0 \quad \text{où } d' \in \mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

Puisque (ABC) contient le point $A(1,2,-3)$, on en déduit que :

$$69+108-57+d'=0 \iff d'=-120.$$

Finalement, un équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$\boxed{(ABC) : 69x+54y+19z-120=0}.$$

Exercice 12. *Déterminer la distance entre le point $M(3,-4,5)$ et le plan passant par les points $A(1,1,0)$, $B(-2,3,2)$ et $C(-2,1,1)$, c'est-à-dire la distance entre M et le projeté orthogonal H de M sur (ABC).*

► On commence par déterminer une représentation cartésienne du plan (ABC) en cherchant un vecteur normal par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $\overrightarrow{n}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal du plan (ABC). Ainsi $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Donc on veut que :

$$\begin{cases} -3a+2b+2c=0 \\ -3a+c=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 2 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} -2b-c=0 \iff b=-\dfrac{c}{2} \\ -3a+2b+2c=0 \iff a=\dfrac{-c+2c}{3}=\dfrac{c}{3} \end{cases}, \text{où } c\in\mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

Synthèse. On pose $\overrightarrow{n}=2\overrightarrow{i}-3\overrightarrow{j}+6\overrightarrow{k}$. D'après les calculs de l'analyse (en posant $c=6$), $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) qui admet donc une équation cartésienne de la forme :

$$2x-3y+6z+d=0 \quad \text{où } d\in\mathbb{R} \text{ est une constante à déterminer.}$$

Puisque (ABC) contient le point $A(1,1,0)$, on en déduit que :

$$2-3+0+d=0 \iff d=1.$$

Finalement, un équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$(ABC) : 2x-3y+6z+1=0.$$

On cherche maintenant les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur (ABC) par analyse-synthèse.
Analyse. On note $H(x_H,y_H,z_H)$ les coordonnées de H. Puisque $H\in(ABC)$, on sait que :

$$2x_H-3y_H+6z_H+1=0.$$

De plus, puisque H appartient aussi à la droite perpendiculaire à (ABC) passant par M, on veut que $\overrightarrow{MH}=(x_H-3)\overrightarrow{i}+(y_H+4)\overrightarrow{j}+(z_H-5)$ soit un vecteur normal à (ABC), donc que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{MH}$ soient colinéaires. Or :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & x_H-3 \\ -3 & y_H+4 \\ 6 & z_H-5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2\leftarrow 2L_2+3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{2} & x_H-3 \\ 0 & 3x_H+2y_H-1 \\ 0 & -3x_H+z_H+4 \end{pmatrix}.$$

Pour que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{MH}$ soient colinéaires, il suffit donc que $3x_H+2y_H-1=-3x_H+z_H+4=0$. Par conséquent, on veut que les coordonnées de H soient la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x_H-3y_H+6z_H+1=0 \\ 3x_H+2y_H-1=0 \\ -3x_H+z_H+4=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 6 \\ 3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3+3L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{13} & -18 \\ 0 & -9 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -11 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow 13L_3+9L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{2} & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{13} & -18 \\ 0 & 0 & \boxed{98} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -98 \end{pmatrix}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal égal à 3 qui admet une unique solution égale à :

$$\begin{cases} 98z_H=-98 \iff z_H=-1 \\ 13y_H-18z_H=5 \iff y_H=\dfrac{5-18}{13}=-1 \\ 2x_H-3y_H+6z_H=-1 \iff x_H=\dfrac{-1-3+6}{2}=1 \end{cases}$$

Synthèse. On pose le point $H(1,-1,-1)$ qui est le projeté orthogonal de M sur (ABC) d'après les calculs de l'analyse. On en déduit que la distance entre M et (ABC) est égale à :

$$MH=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|=\sqrt{(1-3)^2+(-1+4)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{49}=\boxed{7}.$$

Exercice 13. *On considère les points $A(0,2,1)$, $B(1,-2,0)$, $C(1,2,2)$, $A'(-1,-1,3)$, $B'(-2,1,3)$ et $C'(-3,1,2)$. Montrer que les plans (ABC) et $(A'B'C')$ sont parallèles puis calculer la distance les séparant.*

► On commence par chercher des vecteurs normaux aux plans (ABC) et (A',B',C') par analyse-synthèse.

Analyse. Soit $\overrightarrow{n}=a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal du plan (ABC). Ainsi $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$. Donc on veut que :

$$\begin{cases} a-4b-c=0 \\ a+c=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2-L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & -4 & -1 \\ 0 & \boxed{4} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} 4b+2c=0 \iff b=-\dfrac{c}{2} \\ a-4b-c=0 \iff a=-2c+c=-c \end{cases}, \text{où } c\in\mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

De même pour $\overrightarrow{n}'=a'\overrightarrow{i}+b'\overrightarrow{j}+c'\overrightarrow{k}$ un vecteur normal au plan $(A'B'C')$ dirigé par $\overrightarrow{A'B'}=-\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{A'C'}=-2\overrightarrow{i}+2\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$, on veut que :

$$\begin{cases} -a'+2b'=0 \\ -2a'+2b'-c'=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2-2L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} -2b'-c'=0 \iff b'=-\dfrac{c'}{2} \\ -a'+2b'=0 \iff a'=-c' \end{array}\right. ,\text{où } c'\in\mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

<u>Synthèse</u>. On pose $\overrightarrow{n}=-2\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+2\overrightarrow{k}$. D'après les calculs de l'analyse (en posant $c=2$ et $c'=2$), $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal à la fois au plan (ABC) et au plan $(A'B'C')$. On en déduit que $\boxed{(ABC) \text{ et } (A'B'C') \text{ sont parallèles}}$. Pour calculer la distance les séparant, il suffit de déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de A sur $(A'B'C')$ par analyse-synthèse.
<u>Analyse</u>. On note $H(x_H,y_H,z_H)$ les coordonnées de H. Puisque $H\in(A'B'C')$, on sait que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'H}=(x_H+1)\overrightarrow{i}+(y_H+1)\overrightarrow{j}+(z_H-3)\overrightarrow{k}$ sont coplanaires. Or :

$$\begin{aligned} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & x_H+1 \\ 2 & 2 & y_H+1 \\ 0 & -1 & z_H-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2\leftarrow L_2+2L_1 \\ \\ \end{matrix} &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & x_H+1 \\ 0 & \boxed{-2} & 2x_H+y_H+3 \\ 0 & -1 & z_H-3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3\leftarrow 2L_3-L_2 \end{matrix} \\ &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & x_H+1 \\ 0 & \boxed{-2} & x_H+y_H+2 \\ 0 & 0 & -2x_H-y_H+2z_H-9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour que les vecteurs $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'H}$ soient coplanaires, il suffit donc que $-2x_H-y_H+2z_H-9=0$.

On obtient une équation cartésienne du plan $(A'B'C')$: $-2x-y+2z-9=0$. On peut donc vérifier la cohérence de ce résultat avec le vecteur normal $\overrightarrow{n}$, ou à l'aide des coordonnées des points A', B' et C'.

De plus, puisque H appartient aussi à la droite perpendiculaire à $(A'B'C')$ passant par A, on veut que $\overrightarrow{AH}=x_H\overrightarrow{i}+(y_H-2)\overrightarrow{j}+(z_H-1)$ soit un vecteur normal à $(A'B'C')$, donc que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient colinéaires. Or :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-2} & x_H \\ -1 & y_H-2 \\ 2 & z_H-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-2} & x_H \\ 0 & -x_H+2y_H-4 \\ 0 & x_H+z_H-1 \end{pmatrix}.$$

Pour que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ soient colinéaires, il suffit donc que $-x_H+2y_H-4=x_H+z_H-1=0$.
Par conséquent, on veut que les coordonnées de H soient la solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{r} -2x_H-y_H+2z_H-9=0 \\ -x_H+2y_H-4=0 \\ x_H+z_H-1=0 \end{array}\right. &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2\leftarrow 2L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow 2L_3+L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & -2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3\leftarrow 5L_3+L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{18} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal égal à 3 qui admet une unique solution égale à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 18z_H=54 & \iff & z_H=3 \\ 5y_H-2z_H=-1 & \iff & y_H=\dfrac{-1+6}{5}=1 \\ -2x_H-y_H+2z_H=9 & \iff & x_H=\dfrac{-9-1+6}{2}=-2 \end{array}\right.$$

Synthèse. On pose le point $H(-2,1,3)$ qui est le projeté orthogonal de A sur $(A'B'C')$ d'après les calculs de l'analyse. On en déduit que la distance séparant les plans parallèles (ABC) et $(A'B'C')$ est égale à :

$$AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{(-2-0)^2+(1-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{9} = \boxed{3}.$$

Exercice 14. *On considère les points $A(1,2,-3)$, $B(4,-5,6)$, $A'(9,8,-7)$ et $B'(6,-5,4)$. Montrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont ni parallèles, ni sécantes.*

▶ La droite (AB) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$, et la droite $(A'B')$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{i} - 13\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k}$. Or :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 \\ -7 & -13 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 \\ 0 & \boxed{-60} \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{3} & -3 \\ 0 & \boxed{-60} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

On en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ne sont pas colinéaires, et donc que $\boxed{(AB) \text{ et } (A'B') \text{ ne sont pas parallèles}}$. De plus, on a des représentations paramétriques de (AB) et $(A'B')$ de la forme :

$$(AB) : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 7t \\ z = -3 + 9t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (A'B') : \begin{cases} x = 9 - 3t' \\ y = 8 - 13t' \\ z = -7 + 11t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

Attention : le paramètre de (AB) ne représente pas la même chose que le paramètre de $(A'B')$. Il est donc nécessaire d'utiliser des noms de variables différentes.

L'intersection des droites (AB) et $(A'B')$ est donc l'ensemble des points $M(x,y,z)$ qui vérifient :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t = 9 - 3t' \iff 3t + 3t' = 8 \\ y = 2 - 7t = 8 - 13t' \iff -7t + 13t' = 6 \\ z = -3 + 9t = -7 + 11t' \iff 9t - 11t' = -4 \end{cases}$$

Or on a d'après la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 3t + 3t' = 8 \\ -7t + 13t' = 6 \\ 9t - 11t' = -4 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3 \\ -7 & 13 \\ 9 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 3L_2 + 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3 \\ 0 & \boxed{60} \\ 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 74 \\ -28 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{matrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{3} & 3 \\ 0 & \boxed{60} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 74 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 2 avec une équation auxiliaire non compatible qui n'admet pas de solutions. On en déduit que $\boxed{(AB) \text{ et } (A'B') \text{ ne sont pas sécantes}}$.

Exercice 15. *Déterminer des équations cartésiennes des droites (AB) et $(A'B')$ de l'exercice 14.*

▶ On cherche deux vecteurs normaux non colinéaires de (AB) par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ un vecteur normal de la droite (AB). Donc $\overrightarrow{n}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} - 7\overrightarrow{j} + 9\overrightarrow{k}$. Donc on veut que :

$$3a - 7b + 9c = 0 \iff a = \frac{7b - 9c}{3} = \frac{7}{3}b - 3c$$
$$\iff (a,b,c) = (7s - 3t, 3s, t) \quad \text{où } (s,t) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont deux constantes quelconques.}$$

Synthèse. On pose $\overrightarrow{n} = 7\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{n}' = -3\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ qui sont deux vecteurs normaux de (AB) d'après les calculs de l'analyse (en posant $(s,t) = (1,0)$ et $(s,t) = (0,1)$). De plus, on a :

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_1 + 3L_2 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}'$ sont non colinéaires. Donc une représentation cartésienne de (AB) est de la forme :

$$(AB) : \begin{cases} 7x + 3y + d = 0 \\ -3x + z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{où } (d,d') \in \mathbb{R}^2 \text{ sont deux constantes à déterminer.}$$

Puisque (AB) contient le point $A(1,2,-3)$, on en déduit que :

$$\begin{cases} 7 + 6 + d = 0 \\ -3 - 3 + d' = 0 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ = \end{matrix} \begin{matrix} d = -13 \\ d' = 6. \end{matrix}$$

Finalement, une représentation cartésienne de la droite (AB) est de la forme :

$$\boxed{(AB) : \begin{cases} 7x + 3y - 13 = 0 \\ -3x + z + 6 = 0 \end{cases}}.$$

On raisonne de même pour la droite $(A'B')$ dirigée par $\overrightarrow{A'B'} = -3\overrightarrow{i} - 13\overrightarrow{j} + 11\overrightarrow{k}$. On pose $\overrightarrow{n}'' = 13\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{n}''' = 11\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{k}$. On a :

$$\overrightarrow{n}''.\overrightarrow{A'B'} = 13 \times (-3) - 3 \times (-13) + 0 \times 11 = 0, \quad \overrightarrow{n}'''.\overrightarrow{A'B'} = 11 \times (-3) + 0 \times (-13) + 3 \times 11 = 0$$

$$\text{et} \quad \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \\ 13 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{13}{3}L_1 - \frac{11}{3}L_2 \end{matrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 \\ 0 & \boxed{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

On en déduit que $\overrightarrow{n}''$ et $\overrightarrow{n}'''$ sont deux vecteurs normaux non colinéaires de $(A'B')$ qui admet donc une représentation cartésienne de la forme :

$$(A'B') : \begin{cases} 13x - 3y + d'' = 0 \\ 11x + 3z + d''' = 0 \end{cases} \quad \text{où } (d'',d''') \in \mathbb{R}^2 \text{ sont deux constantes à déterminer.}$$

Puisque $(A'B')$ contient le point $B'(6,-5,4)$, on en déduit que :

$$\begin{cases} 78 + 15 + d'' = 0 \\ 66 + 12 + d''' = 0 \end{cases} \begin{matrix} \iff \\ = \end{matrix} \begin{matrix} d'' = -93 \\ d''' = -78. \end{matrix}$$

Finalement, une représentation cartésienne de la droite $(A'B')$ est de la forme :

$$\boxed{(A'B') : \begin{cases} 13x - 3y - 93 = 0 \\ 11x + 3z - 78 = 0 \end{cases}}.$$

Exercice 16. *On considère les points $A(5,7,1)$, $B(-7,-12,3)$, $C(-2,5,-16)$, $D(6,0,3)$ et $E(-6,-14,-10)$. À l'aide d'équations cartésiennes, déterminer l'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE).*

► On cherche une équation cartésienne du plan (ABC) de la forme :

$$(ABC) : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \text{ sont quatre constantes à déterminer.}$$

On raisonne par analyse-synthèse pour trouver les constantes a, b, c et d.
Analyse. Puisque $A(5,7,1)$ appartient à (ABC), on veut que :

$$5a+7b+c+d=0.$$

De même, puisque $B(-7,-12,3)$ et $C(-2,5,-16)$ appartiennent à (ABC), on veut que :

$$-7a-12b+3c+d=0 \quad \text{et} \quad -2a+5b-16c+d=0.$$

Donc :

$$\begin{cases} 5a+7b+c+d=0 \\ -7a-12b+3c+d=0 \\ -2a+5b-16c+d=0 \end{cases} \iff \begin{cases} d+c+7b+5a=0 \\ d+3c-12b-7a=0 \\ d-16c+5b-2a=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & -12 & -7 \\ 1 & -16 & 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 7 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & -19 & -12 \\ 0 & -17 & -2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + 17L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 7 & 5 \\ 0 & \boxed{2} & -19 & -12 \\ 0 & 0 & \boxed{-327} & -218 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang égal à 3 qui admet une infinité de solutions de la forme :

$$\begin{cases} -327b-218a=0 \iff b=-\dfrac{218}{327}a=-\dfrac{2}{3}a \\ 2c-19b-12a \iff c=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{38}{3}a+12a\right)=-\dfrac{1}{3}a \\ d+c+7b+5a=0 \iff d=\dfrac{1}{3}a+\dfrac{14}{3}a-5a=0 \end{cases}, \text{où } a\in\mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

Synthèse. On pose $a=3$, $b=-2$, $c=-1$ et $d=0$. D'après les calculs de l'analyse, une équation cartésienne du plan (ABC) est de la forme :

$$\boxed{(ABC): 3x-2y-z=0}.$$

La droite (DE) passe par $D(6,0,3)$ et est dirigée par $\overrightarrow{DE}=-12\overrightarrow{i}-14\overrightarrow{j}-13\overrightarrow{k}$. Donc une représentation paramétrique de la droite (DE) est de la forme :

$$(DE): \begin{cases} x=6-12t \\ y=-14t \\ z=3-13t \end{cases}, t\in\mathbb{R}.$$

On remarque que si $M(x,y,z)$ appartient à (DE) alors :

$$7x=42-6\times 14t=42+6y \quad \text{donc} \quad 7x-6y-42=0$$

$$\text{et} \quad 13x=78-12\times 13t=78-12(3-z) \quad \text{donc} \quad 13x-12z-42=0.$$

De plus, on a :

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_1 \end{matrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-6} & 0 \\ 0 & \boxed{-12} \\ 7 & 13 \end{pmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{7}{6}L_1 + \frac{13}{12}L_2} = \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{-6} & 0 \\ 0 & \boxed{-12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Par conséquent, on a bien trouvé une représentation cartésienne de la droite (DE) de la forme :

$$\boxed{(DE) : \begin{cases} 7x - 6y - 42 = 0 \\ 13x - 12z - 42 = 0 \end{cases}}.$$

L'intersection du plan (ABC) et de la droite (DE) est donc l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 7x - 6y - 42 = 0 \\ 13x - 12z - 42 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -z - 2y + 3x = 0 \\ -6y + 7x = 42 \\ -12z + 13x = 42 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 3 \\ 0 & -6 & 7 \\ -12 & 0 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 12L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-6} & 7 \\ 0 & 24 & -23 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-6} & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 210 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système échelonné de rang maximal égal à 3 qui admet une unique solution égale à :

$$\begin{cases} 5x = 210 \iff x = 42 \\ -6y + 7x = 42 \iff y = \dfrac{7 \times 42 - 42}{6} = 42 \\ -z - 2y + 3x = 0 \iff z = -2 \times 42 + 3 \times 42 = 42 \end{cases}$$

Finalement, on en déduit que $\boxed{\text{le plan } (ABC) \text{ et la droite } (DE) \text{ s'intersectent en un unique point de coordonnées } (42, 42, 42)}$.