Fiche méthodologique n° 1

Démontrer, prouver, raisonner

1 Prouver une implication

Prouver une proposition du type «$P \Longrightarrow Q$» où P et Q sont deux assertions revient à prouver que P est fausse ou que Q est vraie.

1.1 Démonstration directe

Si P est fausse, l'implication «$P \Longrightarrow Q$» est automatiquement vraie par définition de l'implication. Ainsi, pour prouver la proposition «$P \Longrightarrow Q$», il suffit de considérer seulement le cas où P est vraie. On commence donc par supposer que P est vraie puis on cherche à en déduire que Q est vraie.
Conseil. Si la preuve que Q est vraie n'utilise pas l'hypothèse que P est vraie, c'est qu'on vient de démontrer que Q est toujours vraie et donc que l'énoncé «$P \Longrightarrow Q$» est une tautologie. Sauf en cas exceptionnel d'erreur d'énoncé, il s'agit très certainement d'une erreur de raisonnement ou bien de l'oubli de préciser que P est vraie au moment où on utilise cette hypothèse. Il est donc recommandé de relire et de corriger la démonstration.

Exemple 1
Soient x et y deux réels non nuls. Montrer que si $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ alors $xy = x + y$.

Solution. On suppose que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. On a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy}$. Or $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ d'après notre hypothèse donc $\frac{x+y}{xy} = 1$. On en déduit que $xy = x + y$. Finalement, on a bien démontré l'implication «$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Longrightarrow xy = x + y$». □

Exercice d'application 1
Soit z un complexe. Montrer que si $|z| < 1$ alors $|z - 1| < 2$.

1.2 Démonstration par contraposition

L'implication «$P \Longrightarrow Q$» est équivalente à sa contraposée «(non Q) $\Longrightarrow$ (non P)». Ainsi, pour prouver la proposition «$P \Longrightarrow Q$», il suffit de prouver sa contraposée. On commence donc par supposer que (non Q) est vraie, c'est-à-dire que Q est fausse, puis on cherche à en déduire que (non P) est vraie, c'est-à-dire que P est fausse.
Remarque. Comme pour la démonstration directe, il est recommandé de revoir la démonstration si la preuve que P est fausse n'utilise pas l'hypothèse que Q est fausse.
Conseil. Ce type de démonstration s'utilise lorsqu'il semble plus facile d'utiliser l'hypothèse que Q est fausse plutôt que P est vraie, ou plus facile de prouver que P est fausse plutôt que Q est vraie.

Exemple 2
Soit x un réel. Montrer que si $|x + 1| + |x - 1| \neq 2$ alors $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Solution. On raisonne par contraposition. On suppose que $x \notin]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ donc que $x \in [-1, 1]$. D'après notre hypothèse, on a $x \geqslant -1$ donc $x + 1 \geqslant 0$. On en déduit que $|x + 1| = x + 1$. De même, $|x - 1| = -(x - 1) = 1 - x$ car $x \leqslant 1$ d'après notre hypothèse. On en déduit que $|x + 1| + |x - 1| = x + 1 + 1 - x = 2$. Finalement, on a démontré l'implication «$x \in [-1, 1] \Longrightarrow |x+1| + |x-1| = 2$» et donc aussi l'implication «$|x + 1| + |x - 1| \neq 2 \Longrightarrow x \notin [-1, 1]$» par contraposition. □

Exercice d'application 2
Soient x et y deux réels. Montrer que si x et y ont même signe alors $(x - y)^2 \leqslant (x + y)^2$.

2 Prouver une équivalence

Prouver une proposition du type «$P \Longleftrightarrow Q$» où P et Q sont deux assertions, revient à prouver les deux implications «$P \Longrightarrow Q$» et «$Q \Longrightarrow P$».

2.1 Démonstration par double implication

Conseil. Il vaut mieux commencer par prouver l'implication qui semble la plus facile ; ça peut aider à avoir des idées pour démontrer sa réciproque.

Exercice d'application 3
Soient a, x deux réels et $\varepsilon > 0$. Montrer que $|x - a| \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

2.2 Démonstration par chaîne d'implications

Dans le cas de plusieurs équivalences, il suffit de prouver une chaîne d'implications. Ainsi, pour prouver une proposition du type «$P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$» où P, Q et R sont trois assertions, il suffit de prouver les implications «$P \Longrightarrow Q$», «$Q \Longrightarrow R$» et «$R \Longrightarrow P$».
Remarque. Il est inutile de prouver l'implication «$Q \Longrightarrow P$» qui se déduit des implications «$Q \Longrightarrow R$» et «$R \Longrightarrow P$» par transitivité. De même pour les implications «$R \Longrightarrow Q$» et «$P \Longrightarrow R$».

Exercice d'application 4
Soit z un complexe. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes : «$|z| < 1$», «$z\overline{z} < 1$», «$\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 < 1$» et «$\mathrm{Re}(\frac{z+1}{z-1}) < 0$».

3 Raisonner par déduction

Pour prouver une proposition Q, il suffit d'après le principe de déduction de connaître une implication vraie du type «$P \Longrightarrow Q$» et de prouver que l'assertion P est vraie. Autrement dit, un raisonnement par déduction consiste à rappeler un résultat connu (le plus souvent un théorème du cours) dont on a reconnu la conclusion Q, puis de vérifier ses hypothèses P.

Exemple 3
Montrer que la suite $\left(u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1\times 2\times \cdots \times n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Solution. On sait que toute suite croissante et majorée est convergente. Or on a pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{1\times 2\times\cdots\times n\times(n+1)} > 0$$
donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. De plus on a pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{1\times 2\times 3} + \cdots + \frac{1}{1\times 2\times\cdots\times n} \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\times 2} + \cdots + \frac{1}{2\times 2\times\cdots\times 2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leqslant 2 \end{aligned}$$
donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée. Par déduction, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. □

Exercice d'application 5
Montrer qu'il existe un réel α tel que $\cos(\alpha) = \alpha$.

4 Raisonner par l'absurde

Pour prouver une proposition P, il suffit d'après le principe de double négation de prouver que l'assertion «non P» est fausse. Autrement dit, un raisonnement par l'absurde consiste à supposer la conclusion P fausse et d'en déduire une absurdité (par exemple qu'une assertion est à la fois vraie et fausse).
Conseil. Ce type de démonstration s'utilise lorsqu'il semble plus facile d'utiliser l'hypothèse que P est fausse plutôt que de prouver que P est vraie.

Exercice d'application 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $3n + 1$ paires de chaussettes sont rangées dans n tiroirs. Montrer qu'il existe un tiroir contenant au moins 4 paires de chaussettes.

Exercice d'application 7
Soient x et y deux réels positifs. Montrer que si $\frac{x}{y+1} = \frac{y}{x+1}$ alors $x = y$.

5 Prouver une proposition commençant par $\forall$

Prouver une proposition du type «$\forall x \in E,\ P(x)$» où E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat consiste à prouver que $P(x)$ est vrai pour chaque élément x de E.

5.1 Cas général

On commence par fixer un élément générique x de E pour lequel on ne fait aucune autre hypothèse que $x \in E$. Puis on démontre que $P(x)$ est vrai pour cet élément générique, ce qui prouve en généralisant que $P(x)$ est vrai pour tout $x \in E$.

Exemple 4
Démontrer l'inégalité triangulaire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Solution. Soient x et y deux réels quelconques fixés. On a :
$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x^2| + 2xy + |y^2| = |x|^2 + 2xy + |y|^2$$
car x^2 et y^2 sont positifs. Or $2xy \leqslant |2xy| = 2|x||y|$ donc :
$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.$$
En passant à la racine carrée, on obtient $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ car $|x+y|$ et $|x|+|y|$ sont positifs. Puisque cette démonstration est valable pour n'importe quels réels x et y, on en déduit que le résultat est vrai pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. □

Exercice d'application 8
Démontrer l'inégalité suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ||x| - |y|| \leqslant |x+y|$.

Exemple 5
Montrer que : $\forall (a,b) \in]0,+\infty[^2,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Solution. Soit $a \in]0,+\infty[$ un réel quelconque fixé. On pose $f : x \mapsto \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée $f' : x \mapsto \frac{a}{ax} - 0 - \frac{1}{x} = 0$, donc f est constante sur $]0,+\infty[$. Or $f(1) = \ln(a) - \ln(a) - 0 = 0$ donc f est constante égale à 0 sur $]0,+\infty[$. Ainsi $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Puisque cette démonstration est valable pour n'importe quel réel $a \in]0,+\infty[$, on en déduit que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ pour tout $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. □

Exercice d'application 9
Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.

5.2 Raisonnement par disjonction de cas

Il est parfois possible de subdiviser le cas général en plusieurs cas particuliers, c'est-à-dire d'écrire $E = \bigcup_{i=1}^{N} E_i$ où $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont $N \geqslant 2$ parties de E. Alors, après avoir fixé un élément générique x de E, on prouve que $P(x)$ est vrai dans chacun des N cas $x \in E_i$ où $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$.
Attention. L'union des cas considérés doit couvrir tous les cas possibles ! Par contre, il n'est pas nécessaire que les cas soient disjoints deux à deux même si c'est souvent plus facile en pratique (afin d'être méthodique et ne pas oublier un cas).

Exemple 6
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| \leqslant x^2 - x + 1$.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. Premier cas : $x \geqslant 1$ alors $x - 1 \geqslant 0$. On en déduit que :
$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (x-1) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geqslant 0.$$

Ainsi $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$ dans le cas où $x \geqslant 1$. Deuxième cas : $x < 1$ alors $x - 1 < 0$. On en déduit que :

$$x^2 - x + 1 - |x-1| = x^2 - x + 1 - (-(x-1)) = x^2 \geqslant 0.$$

Ainsi $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$ dans le cas où $x < 1$. Conclusion : dans tous les cas, on a montré que $|x-1| \leqslant x^2 - x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Exercice d'application 10
Démontrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \max\{x,y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$.

6 Prouver une proposition commençant par $\exists$

Prouver une proposition du type «$\exists x \in E,\ P(x)$» où E est un ensemble et $P(x)$ un prédicat consiste à prouver qu'il existe au moins un élément x de E tel que $P(x)$ est vrai. C'est souvent un problème difficile.

6.1 Démonstration constructive : analyse-synthèse

Il suffit de trouver explicitement un élément particulier x de E tel que $P(x)$ est vrai. Pour cela, on commence par énumérer toutes les conditions nécessaires que x doit satisfaire, ce qui permet d'avoir l'intuition d'un petit nombre de candidats possibles pour x : c'est l'analyse. Puis on vérifie un à un chaque candidat possible pour x que $P(x)$ est vrai : c'est la synthèse. Dès que l'un des candidats convient, la démonstration est finie.
Remarque. L'analyse permet de construire une solution en réduisant le nombre de candidats possibles ; plus elle est précise et moins le travail de synthèse sera laborieux. C'est la partie la plus importante de la recherche même si en toute logique la rédaction de la synthèse est suffisante pour démontrer le résultat.

Exemple 7
Montrer qu'il existe un réel x tel que $x = \sqrt{2-x}$.

Solution. Analyse. En élevant au carré on obtient : $x^2 = (\sqrt{2-x})^2 = 2 - x$. Il faut donc que x soit solution de $x^2 + x - 2 = 0$. Ainsi $x = -2$ ou $x = 1$. Synthèse. $x = -2$ n'est pas solution car $\sqrt{2-(-2)} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$; par contre $x = 1$ est bien solution car $\sqrt{2-1} = \sqrt{1} = 1$. Donc il existe bien $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{2-x}$. □

Exercice d'application 11
Montrer qu'il existe un réel x tel que $\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x+2)$.

Exemple 8
Montrer qu'il existe une fonction polynomiale P de degré 2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x+1) - P(x) = x$.

Solution. Analyse. On cherche P de la forme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Il faut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x = P(x+1) - P(x) = \big(a(x+1)^2 + b(x+1) + c\big) - \big(ax^2 + bx + c\big) = 2ax + a + b$$

donc $2a = 1$ et $a + b = 0$ par identification des coefficients de polynômes. Ainsi $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$ et on peut choisir c quelconque. Synthèse. On pose $P : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$. Alors $P(x+1) - P(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ en reprenant le même calcul que dans l'analyse. □

Exercice d'application 12
Montrer qu'il existe une fonction polynomiale P de degré 3 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x+1) - P(x-1) = x^2$.

6.2 Démonstration non-constructive

Il n'est pas nécessaire de trouver explicitement un élément particulier x de E tel que $P(x)$ soit vrai pour prouver que cet élément existe. Certains théorèmes généraux permettent de justifier l'existence de x sans le construire. Il suffit alors de vérifier les hypothèses de l'un de ces théorèmes en raisonnant par déduction.

Exercice d'application 13
Montrer qu'il existe un réel x tel que $x^3 = x^2 + x + 1$.

6.3 Cas d'une proposition commençant par $\exists!$

Dans le cas d'une proposition du type «$\exists! x \in E,\ P(x)$», il s'agit de plus de prouver que l'élément x de E tel que l'assertion $P(x)$ est vrai est unique. Dans le cas d'une démonstration constructive, il suffit de prouver que parmi tous les candidats possibles pour x obtenus lors de l'analyse, un seul seulement convient lors de la synthèse.

Exercice d'application 14
Montrer qu'il existe un unique couple de réels (a,b) tel que $ab = a + b = 4$.

On peut aussi démontrer l'unicité en raisonnant par l'absurde : on suppose l'existence de $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $P(x_1)$ et $P(x_2)$ sont vraies puis on montre que $x_1 = x_2$.
Conseil. Il est souvent plus facile de commencer par démontrer l'unicité avant l'existence.

Exemple 9
Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

Solution. Unicité : on suppose qu'il existe deux fonctions paires g_1, g_2 et deux fonctions impaires h_1, h_2 telles que $f = g_1 + h_1 = g_2 + h_2$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f(x) + f(-x) = \\ &\quad (g_1(x) + h_1(x)) + (g_1(-x) + h_1(-x)) = (g_2(x) + h_2(x)) + (g_2(-x) + h_2(-x)) \\ &\quad g_1(x) + h_1(x) + g_1(x) - h_1(x) = g_2(x) + h_2(x) + g_2(x) - h_2(x) \\ &\quad 2g_1(x) = 2g_2(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $g_1 = g_2$ et donc aussi $h_1 = h_2$ car $f = g_1+h_1 = g_2+h_2$. Par conséquent, s'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f = g + h$, alors ces fonctions sont uniques. Analyse de l'existence. Avec le même calcul que dans l'unicité, il faut que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x)+f(-x) = 2g(x)$ donc $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$. Puisque $f = g + h$, il faut aussi que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(2f(x) - f(x) - f(-x)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. Synthèse. On pose les fonctions $g : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $h : x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x)+f(x)) = \tfrac{1}{2}(f(x)+f(-x)) = g(x) \\ h(-x) &= \tfrac{1}{2}(f(-x)-f(x)) = -\tfrac{1}{2}(f(x)-f(-x)) = -h(x) \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad g(x)+h(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)) = f(x).$$

Donc il existe bien une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f = g+h$. $\square$

Exercice d'application 15
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ x = a + b$ et $y = a - b$.

7 Prouver une inclusion

Prouver une proposition du type «$A \subset B$» où A et B sont deux parties d'un ensemble E revient à prouver la proposition «$\forall x \in A,\ x \in B$».
Remarque. Ceci revient aussi à prouver la proposition «$\forall x \in E,\ x \in A \Longrightarrow x \in B$» et on retrouve la même logique de démonstration.

Exemple 10
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A}$.

Solution. Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Donc x n'est pas un élément de $A \cup B$. En particulier, x n'est pas un élément de A car $A \subset A \cup B$, c'est-à-dire $x \in \overline{A}$. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in \overline{A \cup B}$, on en déduit que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A}$. $\square$

Exercice d'application 16
Montrer que $\{(2a + b, a - b, 4a - b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2y - z = 0\}$.

8 Prouver une égalité d'ensembles

Pour prouver une proposition du type «$A = B$» où A et B sont deux parties d'un ensemble E, il suffit de prouver les deux inclusions «$A \subset B$» et «$B \subset A$».

Exercice d'application 17
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer les deux lois de Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice d'application 18
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cap B = A \cup B$ alors $A = B$.

Exercice d'application 19
Montrer que $\{(5 - 3t, -2 + 2t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 4\}$.

9 Raisonner par récurrence

Pour prouver une proposition du type «$\forall n \geqslant n_0,\ P_n$», où n_0 est un entier et P_n un prédicat, on peut raisonner par récurrence.

9.1 Récurrence simple

Dans une récurrence simple, on commence par prouver que P_{n_0} est vrai : c'est l'initialisation. Puis on prouve la proposition «$\forall n \geqslant n_0,\ P_n \Longrightarrow P_{n+1}$» : c'est l'hérédité. Enfin on conclut d'après le principe de récurrence (par déduction).

Exemple 11
Démontrer l'inégalité de Bernoulli : $\forall n \geqslant 2,\ \forall x \in [-1, +\infty[\setminus\{0\},\ (1 + x)^n > 1 + nx$.

Solution. On fixe $x \in [-1, +\infty[\setminus\{0\}$ et on va montrer l'inégalité $(1+x)^n > 1+nx$ pour tout $n \geqslant 2$ par récurrence. Initialisation. Pour $n = 2$, on a $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ car $x^2 > 0$ puisque $x \neq 0$. Donc l'inégalité est vraie pour $x = 2$. Hérédité. On fixe $n \geqslant 2$ et on suppose que l'inégalité $(1 + x)^n > 1 + nx$ est vraie. Alors on a : $(1 + x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx)$ d'après l'hypothèse de récurrence et car $1+x \geqslant 0$. De plus : $(1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$ car $nx^2 > 0$ puisque $x \neq 0$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, si $(1 + x)^n > 1 + nx$ est vraie alors $(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x$ aussi. Conclusion. On en déduit par récurrence que $(1 + x)^n > 1 + nx$ pour tout $n \geqslant 2$. Et cette inégalité est vraie pour tout $x \in [-1, +\infty[\setminus\{0\}$. $\square$

Exercice d'application 20
Démontrer que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

9.2 Récurrence double

Dans une récurrence double, l'initialisation consiste à prouver que P_{n_0} et P_{n_0+1} sont vrais et l'hérédité consiste à prouver la proposition «$\forall n \geqslant n_0,\ (P_n$ et $P_{n+1}) \Longrightarrow P_{n+2}$».

Exercice d'application 21
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $u_n = 2 \times 3^n - 3 \times 2^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice d'application 22
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = a + 2^n b$ pour tout entier $n \geqslant 0$.