Fiche méthodologique n° 10

Dériver, primitiver et résoudre des EDL à coeff. const.

1 Calculer des dérivées

1.1 Utilisation des dérivées usuelles

Les ensembles de dérivabilité et les dérivées des fonctions usuelles sont à connaître.

Exercice d'application 1
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 2^x + 3\tan(x), \quad g : t \mapsto \sqrt{t}\sin(t) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{x^3}{\ln(x)}.$$

Exercice d'application 2
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} k\cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ à l'aide de la dérivée de la fonction $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

1.2 Dérivée d'une composée

Si g et f sont deux fonctions réelles alors la composée $g \circ f$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si f est dérivable en x et g est dérivable en $f(x)$, de plus on a dans ce cas :

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x))}.$$

Plus généralement, si une fonction réelle f peut s'écrire comme la composée de $n \in \mathbb{N}^\star$ fonctions réelles $f_1, f_2, \ldots, f_n$, c'est-à-dire si $f = f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$, alors f est dérivable en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si f_1 est dérivable en x, f_2 est dérivable en $f_1(x)$, f_3 est dérivable en $f_2(f_1(x))$, ...et f_n est dérivable en $f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots)$. De plus, on a la règle de dérivation en chaîne :

$$(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)' = f_1' \times (f_2' \circ f_1) \times (f_3' \circ f_2 \circ f_1) \times \cdots \times (f_n' \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1).$$

Conseil. Pour déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une composée, on procède en pratique comme pour l'ensemble de définition : après avoir «décomposé» la fonction en déterminant l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction qui la compose (les $\mathcal{D}_{f_k'}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$), on étudie les domaines de dérivabilité de l'intérieur vers l'extérieur, c'est-à-dire qu'on cherche les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ telles que $x \in \mathcal{D}_{f_1'}$, puis telles que $f_1(x) \in \mathcal{D}_{f_2'}$, puis telles que $f_2(f_1(x)) \in \mathcal{D}_{f_3'}$, etc., enfin on prend l'intersection de tous les ensembles obtenus. Autrement dit :

$$\mathcal{D}_{(f_n \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)'} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}_{f_1'} \text{ et } f_1(x) \in \mathcal{D}_{f_2'} \text{ et } f_2(f_1(x)) \in \mathcal{D}_{f_3'} \text{ et } f_3(f_2(f_1(x))) \in \mathcal{D}_{f_4'} \text{ et } \ldots \text{ et } f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x)))\ldots) \in \mathcal{D}_{f_n'}\}.$$

Exercice d'application 3
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \ln(e^x - 2), \quad g : t \mapsto \arctan^4\left(\sqrt[4]{t}\right) \quad \text{et} \quad h : x \mapsto (2x+1)^{\cos(x)}.$$

1.3 Dérivée d'une bijection réciproque

Si $f : A \to B$ est une fonction réelle bijective alors la bijection réciproque $f^{-1} : B \to A$ est dérivable en $y \in B$ si et seulement si f est dérivable en $f^{-1}(y)$ et $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. De plus on a dans ce cas :

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}.$$

Conseil. Cette formule se retrouve en dérivant la composée $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{f(I)} : y \mapsto y$.
Conseil. Pour ne pas oublier la condition $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, il suffit de remarquer que si $f'(f^{-1}(y)) = 0$ alors la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point $(f^{-1}(y), f(f^{-1}(y))) = (f^{-1}(y), y)$ ce qui correspond à une tangente verticale à la courbe représentative de f^{-1} au point $(y, f^{-1}(y))$ (par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$).
Remarque. En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I avec $f' > 0$ (ou bien $f' < 0$) sur I alors $f : I \to f(I)$ est bijective d'après le théorème de la bijection et f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $f(I)$.

Exemple 1
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arccos.

Solution. La fonction arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$ est la bijection réciproque de la restriction $\cos|_{[0,\pi]}^{[-1,1]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$ qui est bien bijective d'après le théorème de la bijection. Puisque cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\cos' = -\sin$, arccos est dérivable en $x \in [-1, 1]$ si et seulement si $-\sin(\arccos(x)) \neq 0$. Or, pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ donc $\sin(\arccos(x)) \geqslant 0$ et par conséquent :

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{\sin^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ainsi : $-\sin(\arccos(x)) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x \in \{-1, 1\}$. On en déduit que arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \ \arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

□

Exercice d'application 4
Déterminer l'ensemble de dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction arcsin.

1.4 Dérivées partielles

Dans le cas d'une fonction réelle de plusieurs variables, pour calculer la dérivée partielle par rapport à une variable il suffit de dériver par rapport à cette variable en considérant toutes les autres variables comme des constantes.

Exercice d'application 5
Calculer les dérivées partielles de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \dfrac{xy + z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

2 Calculer des primitives

2.1 Utilisation des primitives usuelles

Les primitives usuelles sont à connaître.

Exercice d'application 6
Déterminer des intervalles où les fonctions suivantes sont continues et calculer leurs primitives :

$$f : x \mapsto \sin(2x)\cos(3x), \quad g : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}.$$

Exercice d'application 7
Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_{7\pi/6}^{4\pi/3} \tan(x)\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \sqrt{2t+1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2-3x}.$$

2.2 Intégration par parties

Si une fonction à intégrer sur $[a, b]$ peut s'écrire sous la forme uv' où u et v sont deux fonctions dérivables (donc continues) sur $[a, b]$ avec u' et v' continues sur $[a, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \Big[u(x)v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x}.$$

Ainsi, pour calculer une primitive de uv' il suffit de calculer une primitive de $u'v$.
Conseil. La difficulté est de bien choisir les fonctions u et v' pour que le calcul d'une primitive de $u'v$ soit plus simple que celui d'une primitive de uv'. Si ce n'est pas le cas, on peut essayer d'inverser le choix de u et v'.

Exemple 2
Déterminer la forme des primitives de la fonction ln.

Solution. La fonction ln est continue sur $]0, +\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ \int_1^x \ln(t)\mathrm{d}t = \int_1^x \Big(\ln(t) \times 1\Big)\mathrm{d}t = \Big[\ln(t) \times t\Big]_1^x - \int_1^x \Big(\frac{1}{t} \times t\Big)\mathrm{d}t$$
$$\text{en posant } \begin{cases} u(t) = \ln(t) \\ v'(t) = 1 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} u'(t) = 1/t \\ v(t) = t \end{cases}$$
$$= x\ln(x) - 0 - \int_1^x 1\mathrm{d}t = x\ln(x) - x.$$

Donc les primitives de ln sont de la forme $x \mapsto x\ln(x) - x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Exercice d'application 8
Calculer l'intégrale $I = \int_1^2 x\ln(x)\mathrm{d}x$.

Exercice d'application 9
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto x^2 2^x$.

Exercice d'application 10
Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi \sin(t)e^t\mathrm{d}t$.

2.3 Changement de variable

Soit φ une fonction réelle définie sur un intervalle I vérifiant

(i) φ est dérivable (donc continue) sur I et φ' est continue sur I,

(ii) il existe $(\alpha, \beta) \in I^2$ tels que $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$.

Si f est continue sur $[a, b]$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

en posant $\boxed{x = \varphi(t)}$ et donc $\boxed{\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t}$.
Conseil. La difficulté est de bien choisir le changement de variable $x = \varphi(t)$ pour que le calcul d'une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ soit plus simple que celui d'une primitive de f.
Remarque. En particulier, si ψ est dérivable sur $[a, b]$ et ψ' est continue sur $[a, b]$ avec $\psi' > 0$ (ou bien $\psi' < 0$) sur $[a, b]$ (donc $\psi : [a, b] \to \psi([a, b])$ est bijective d'après le théorème de la bijection et ψ^{-1} est dérivable sur $\psi([a, b])$) et si g est continue sur $\psi([a, b])$ alors

$$\int_a^b g(\psi(x))\mathrm{d}x = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} \frac{g(t)}{\psi'(\psi^{-1}(t))}\mathrm{d}t$$

en posant $\psi(x) = t$ (c'est-à-dire $x = \psi^{-1}(t)$).

Exemple 3
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \cos(t)$.

Solution. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]$ et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1,1],\ \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= \int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sqrt{1-\cos^2(s)} \times (-\sin(s))\mathrm{d}s \\ &\quad \text{en posant } t=\cos(s) \text{ et donc } \mathrm{d}t = -\sin(s)\mathrm{d}s \\ &= -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sqrt{\sin^2(s)}\sin(s)\mathrm{d}s = -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \sin^2(s)\mathrm{d}s \\ &\quad \text{car } \arccos(x) \in [0,\pi] \text{ et } \sin \geqslant 0 \text{ sur } [0,\pi].\end{aligned}$$

Or $\forall s \in \mathbb{R},\ \sin^2(s) = \left(\frac{e^{is}-e^{-is}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2is}-2+e^{-2is}}{-4} = \frac{2\cos(2s)-2}{-4} = \frac{1-\cos(2s)}{2}$ donc :

$$\begin{aligned}\forall x \in [-1,1],\ \int_0^x \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t &= -\int_{\pi/2}^{\arccos(x)} \left(\frac{1-\cos(2s)}{2}\right)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[s - \frac{\sin(2s)}{2}\right]_{\pi/2}^{\arccos(x)} \\ &= -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Donc les primitives de f sont de la forme $x \mapsto -\frac{1}{2}\arccos(x) + \frac{1}{4}\sin(2\arccos(x)) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$. □

Exercice d'application 11
Déterminer la forme des primitives de la fonction $f : x \mapsto e^{\sqrt{x}}$ en posant $x = t^2$.

Exercice d'application 12
Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \mathrm{d}x/(x^2+4)$ à l'aide d'un changement de variable à déterminer.

Exercice d'application 13
Déterminer la forme des primitives de $f : \theta \mapsto 1/\sin(\theta)$ sur $]0,\pi[$ en posant $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.

3 Résoudre des EDL à coefficients constants

3.1 Cas des EDL homogènes d'ordre 1 à coefficients constants

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{y' + ay = 0}.$$

Ses solutions sont de la forme $\boxed{y : t \mapsto \lambda e^{-at}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante.

Exercice d'application 14
Résoudre l'équation différentielle $2y' + y = 0$.

3.2 Cas des EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{y'' + ay' + by = 0}.$$

Pour déterminer la forme de ses solutions, on commence par résoudre l'équation caractéristique associée d'inconnue $r \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0}. \tag{C}$$

C'est une équation du second degré à coefficients réels, on distingue donc trois cas selon le signe du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.
<u>Si $\Delta > 0$</u> : (C) admet deux solutions réelles distinctes qu'on note r_1 et r_2. Alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}} \quad \text{où } (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

<u>Si $\Delta = 0$</u> : (C) admet une seule solution réelle (double) qu'on note r_0. Alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_0 t}} \quad \text{où } (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

<u>Si $\Delta < 0$</u> : (C) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes qu'on note $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$. Alors les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))} \quad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

Exercice d'application 15
Résoudre l'équation différentielle $f'' + 5f = 4f'$.

Exercice d'application 16
Résoudre $my'' + 2y' + y = 0$ en fonction des valeurs du paramètre $m \in \mathbb{R}$.

3.3 principe de superposition

On considère l'EDL à coefficients constants d'ordre $n \geqslant 1$ suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = f \tag{E}$$

où
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est le second membre ;
- $(a_k)_{k \in [\![1,n-1]\!]}$ sont les coefficients constants ;
- $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue supposée n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour résoudre (E), on commence par résoudre l'EDL homogène associée :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0 \tag{H}$$

puis on détermine une solution particulière y_{P} de (E). D'après le principe de superposition, les solutions de (E) sont de la forme $y = y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}}$ où y_{H} est une solution de (H). Autrement dit :

$$\boxed{\mathscr{S}_{(\mathrm{E})} = \left\{ y_{\mathrm{H}} + y_{\mathrm{P}} \mid y_{\mathrm{H}} \in \mathscr{S}_{(\mathrm{H})} \right\}}$$

où $\mathscr{S}_{(\mathrm{E})}$ est l'ensemble des solutions de (E) et $\mathscr{S}_{(\mathrm{H})}$ celui de (H).

Exercice d'application 17
Résoudre $y' - y = f$ dans les cas suivants :

1. $f : t \mapsto 1$;
2. $f : t \mapsto t^3$ (on cherchera une solution particulière polynomiale) ;
3. $f : t \mapsto t^2 e^t$ (on cherchera une solution particulière sous la forme $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto P(t)e^t$ où P est une fonction polynomiale) ;
4. $f : t \mapsto t\cos(t)$ (on cherchera une solution particulière sous la forme $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto P(t)\cos(t) + Q(t)\sin(t)$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales).

3.4 Problème de Cauchy

Un problème de Cauchy est la détermination des solutions d'une équation différentielle qui vérifient certaines conditions initiales. Pour résoudre un problème de Cauchy, on commence par déterminer la forme de toutes les solutions de l'équation différentielle initiale. Ces solutions vont dépendre de un (par exemple $\lambda \in \mathbb{R}$ dans le cas d'une EDL d'ordre 1 à coefficients constants) ou plusieurs (par exemple $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ou $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ dans le cas d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants) constantes. Puis il suffit de déterminer la valeur de ces constantes en résolvant le système linéaire induit par les conditions initiales.

Exercice d'application 18
Déterminer les solutions de $f'' + 4f = 1 + 4f'$ telles que $f(0) = f'(0) = 1$.

Exercice d'application 19
L'étude d'un système oscillant sans amortissement (un mobile de masse m accroché à un ressort fixé au plafond) conduit à l'équation différentielle $mx'' = -kx$ où $x(t)$ est la position verticale du mobile à l'instant t à partir du point d'équilibre $x = 0$ et $k > 0$ est la constante de raideur du ressort. Le système étant au repos, on tire le mobile d'une longueur $\ell > 0$ et on le lâche à l'instant $t = 0$. Calculer la période d'une oscillation en fonction des paramètres m, k et ℓ.