

# Manipuler des matrices

## 1 Calculer le rang d'une matrice rectangulaire

Le rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est le nombre de lignes non nulles de la matrice échelonnée obtenue à partir de  $A$  en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

### Exemple 1

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ .

*Solution.* Pour éviter de distinguer le cas où le pivot  $a$  est nul, on permute les deux premières lignes  $L_1 \leftrightarrow L_2$  (afin de prendre 1 comme pivot). Ensuite on effectue les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - aL_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ . On obtient :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $a = 1$  alors les deux dernières lignes sont nulles et donc  $\text{rang}(A) = 1$ . Si  $a \neq 1$ , on multiplie les deux dernières lignes par  $\frac{1}{1-a}$  :  $L_2 \leftarrow \frac{1}{1-a}L_2$  et  $L_3 \leftarrow \frac{1}{1-a}L_3$ . Puis on permute  $L_2 \leftrightarrow L_3$  (afin de prendre 1 comme pivot). Ensuite on effectue l'opération  $L_3 \leftarrow L_3 - (1+a)L_2$ . On obtient :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 - a^2 & 1 - a \\ 0 & 1 - a & a - 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 + a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 + a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2+a} \end{pmatrix}.$$

Si  $a = -2$  alors la dernière ligne est nulle et donc  $\text{rang}(A) = 2$ . Enfin si  $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$  alors  $\text{rang}(A) = 3$ .  $\square$

### Exercice d'application 1

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ .

## 2 Montrer qu'une matrice carrée est inversible

Etant donnée une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on cherche à savoir si  $A$  est inversible ou non (sans nécessairement calculer l'inverse de  $A$ ).

## 2.1 Par calcul du déterminant dans le cas d'une matrice $2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \text{ est inversible si et seulement si } \det(A) = ad - bc \neq 0.$$

### Exercice d'application 2

Déterminer pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $\begin{pmatrix} 2a+3 & a \\ a & 3a+2 \end{pmatrix}$  est inversible.

## 2.2 Par calcul du rang

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ est inversible si et seulement si } \text{rang}(A) = n.$$

### Exercice d'application 3

Déterminer pour quelles valeurs de  $a \in \mathbb{R}$  la matrice  $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$  est inversible.

## 3 Calculer l'inverse d'une matrice inversible

Etant donnée une matrice carrée  $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$  dont on sait qu'elle est inversible, on cherche à calculer sa matrice inverse  $A^{-1} \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ .

### 3.1 Cas des matrices $2 \times 2$

Si la matrice  $A$  est d'ordre 2, c'est-à-dire si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , alors sa matrice inverse est donnée par l'expression suivante :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

### Exercice d'application 4

Résoudre  $\begin{cases} ax + a^2y = 1 + a \\ a^4x + a^3y = 3 - a \end{cases}$  d'inconnues  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  en fonction du paramètre  $a \in \mathbb{R}$ .

### 3.2 Par résolution d'un système linéaire

Pour tout  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , le système linéaire  $AX = Y$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  admet pour unique solution  $X = A^{-1}Y$ . Il suffit donc de résoudre le système linéaire  $AX = Y$  pour une matrice colonne  $Y$  «générique» afin de déterminer  $A^{-1}$ .

### Exemple 2

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

*Solution.* On pose  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - 3y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 - 3y_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 - 3y_1 \\ y_2 - 2y_3 + 5y_1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{aligned}$$

Le système linéaire, donc la matrice  $A$ , est de rang maximal donc  $A$  est inversible. De plus, l'unique solution du système linéaire est :

$$\begin{aligned} AX = Y &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - x_2 - 2x_3 = 24y_1 + 4y_2 - 9y_3 \\ x_2 = -3y_1 + y_3 + 2x_3 = -13y_1 - 2y_2 + 5y_3 \\ x_3 = -5y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 4 & -9 \\ -13 & -2 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 4 & -9 \\ -13 & -2 & 5 \\ -5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . □

### Exercice d'application 5

Montrer que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$  est inversible et calculer son inverse.

### 3.3 A l'aide d'un polynôme annulateur

On suppose qu'existe un polynôme qui annule  $A$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $d \geq 1$  et des coefficients  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$  tels que :

$$a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

Si  $a_0 \neq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{a_d}{a_0} A^d - \frac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-1} - \dots - \frac{a_2}{a_0} A^2 - \frac{a_1}{a_0} A \\ &= A \times \left( -\frac{a_d}{a_0} A^{d-1} - \frac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-2} - \dots - \frac{a_2}{a_0} A - \frac{a_1}{a_0} I_n \right) \\ &= \left( -\frac{a_d}{a_0} A^{d-1} - \frac{a_{d-1}}{a_0} A^{d-2} - \dots - \frac{a_2}{a_0} A - \frac{a_1}{a_0} I_n \right) \times A. \end{aligned}$$

Ainsi,  $A$  est inversible et  $A^{-1} = -\sum_{k=0}^{d-1} \frac{a_{k+1}}{a_0} A^k$ .

### Exemple 3

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2$  puis en déduire  $A^{-1}$ .

*Solution.* On a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 12 & -30 \\ -9 & -17 & 45 \\ -3 & -6 & 16 \end{pmatrix} = A + 2I_3.$$

On en déduit que  $I_3 = \frac{1}{2}(A^2 - A) = A \times \left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) = \left(\frac{1}{2}(A - I_3)\right) \times A$ , donc  $A$  est inversible et :

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ -9/2 & -10 & 45/2 \\ -3/2 & -3 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

□

### Exercice d'application 6

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A + A^2$  et  $A^3$  puis en déduire  $A^{-1}$ .

## 4 Calculer les puissances d'une matrice carrée

Etant donnée une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on cherche à calculer les puissances successives  $A^p$  de  $A$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

### 4.1 Cas des matrices nilpotentes

Si on trouve un entier naturel  $q \geq 1$  tel que  $A^q = 0_n$ , alors la matrice  $A$  est dite nilpotente et donc  $A^p = 0_n$  pour tout entier  $p \geq q$ .

*Conseil.* C'est par exemple le cas pour les matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

#### Exemple 4

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

*Solution.* On a  $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Donc  $\forall p \geq 3, A^p = 0_3$ .  $\square$

#### Exercice d'application 7

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

### 4.2 Par récurrence

On peut calculer les premières puissances  $A^2, A^3, A^4, \dots$  puis essayer de conjecturer une expression de  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$  qu'on démontrera par récurrence.

#### Exemple 5

Soit  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $U^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

*Solution.* On a :

$$U^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4U, \quad U^3 = \begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix} = 16U, \quad U^4 = \begin{pmatrix} 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \\ 64 & 64 & 64 & 64 \end{pmatrix} = 64U.$$

On conjecture que  $U^p = 4^{p-1}U$  pour tout  $p \geq 1$  (et  $U^0 = I_4$ ). Le résultat est vrai pour  $p=1$ . De plus, si on suppose le résultat vrai pour un certain entier  $p \geq 1$  alors

$$U^{p+1} = U^p \times U = 4^{p-1}U \times U = 4^{p-1}U^2 = 4^{p-1} \times 4U = 4^pU = 4^{(p+1)-1}U.$$

On conclut d'après le principe de récurrence.  $\square$

#### Exercice d'application 8

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

### 4.3 À l'aide d'un polynôme annulateur

On suppose qu'existe un polynôme qui annule  $A$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $d \geq 1$  et des coefficients  $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{d-1}, a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$  tels que :

$$a_d A^d + a_{d-1} A^{d-1} + a_{d-2} A^{d-2} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

Si  $a_d \neq 0$ , alors :

$$\begin{aligned} A^d &= -\frac{a_{d-1}}{a_d} A^{d-1} - \frac{a_{d-2}}{a_d} A^{d-2} - \dots - \frac{a_2}{a_d} A^2 - \frac{a_1}{a_d} A - \frac{a_0}{a_d} I_n \\ A^{d+1} &= -\frac{a_{d-1}}{a_d} A^d - \frac{a_{d-2}}{a_d} A^{d-1} - \dots - \frac{a_2}{a_d} A^3 - \frac{a_1}{a_d} A^2 - \frac{a_0}{a_d} A \\ &= \left( \frac{(a_{d-1})^2}{a_d^2} - \frac{a_{d-2}}{a_d} \right) A^{d-1} + \left( \frac{a_{d-1} a_{d-2}}{a_d^2} - \frac{a_{d-3}}{a_d} \right) A^{d-2} + \dots + \left( \frac{a_{d-1} a_1}{a_d^2} - \frac{a_0}{a_d} \right) A + \left( \frac{a_{d-1} a_0}{a_d^2} \right) I_n \\ A^{d+2} &= -\frac{a_{d-1}}{a_d} A^{d+1} - \frac{a_{d-2}}{a_d} A^d - \dots - \frac{a_2}{a_d} A^4 - \frac{a_1}{a_d} A^3 - \frac{a_0}{a_d} A^2 \\ &= (\dots) A^{d-1} + (\dots) A^{d-2} + \dots + (\dots) A + (\dots) I_n \\ A^{d+3} &= \dots = (\dots) A^{d-1} + (\dots) A^{d-2} + \dots + (\dots) A + (\dots) I_n \end{aligned}$$

Ainsi, on peut trouver par récurrence des suites de coefficients  $(b_{0,p})_{p \in \mathbb{N}}, (b_{1,p})_{p \in \mathbb{N}}, (b_{2,p})_{p \in \mathbb{N}}, \dots, (b_{d-1,p})_{p \in \mathbb{N}}$  telles que  $A^p = \sum_{k=0}^{d-1} b_{k,p} A^k$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

#### Exemple 6

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -30 \\ -9 & -19 & 45 \\ -3 & -6 & 14 \end{pmatrix}$ . Déterminer deux suites  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = a_p A + b_p I_3.$$

*Solution. Analyse.* On a  $A^0 = I_3 = 0A + 1I_3$  donc on pose  $a_0 = 0$  et  $b_0 = 1$ . De même  $A^1 = A$  donc  $a_1 = 1$  et  $b_1 = 0$ ,  $A^2 = A + 2I_3$  (d'après l'exemple 3) donc  $a_2 = 1$  et  $b_2 = 2$ , etc. Si on suppose qu'on a trouvé  $a_p$  et  $b_p$  pour un entier  $p \in \mathbb{N}$  fixé alors :

$$A^{p+1} = A^p A = (a_p A + b_p I_3) A = a_p A^2 + b_p A = a_p (A + 2I_3) + b_p A = (a_p + b_p) A + 2a_p I_3$$

donc il suffit de poser  $a_{p+1} = a_p + b_p$  et  $b_{p+1} = 2a_p$ .

*Synthèse.* On définit par récurrence les suites  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{p+1} = a_p + b_p \\ b_{p+1} = 2a_p \end{cases}.$$

Alors on peut démontrer par récurrence que  $A^p = a_p A + b_p I_3$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  à l'aide du même calcul que celui utilisé dans l'analyse. De plus, on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$a_{p+2} = a_{p+1} + b_{p+1} = a_{p+1} + 2a_p.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux. Après calculs, on obtient pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $a_p = (2^p - (-1)^p)/3$  et  $b_p = a_{p+1} - a_p = (2^p + 2(-1)^p)/3$ .  $\square$

#### Exercice d'application 9

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$  et  $(b_p)_{p \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall p \in \mathbb{N}, A^p = a_p A + b_p I_2$ .

#### 4.4 À l'aide de la formule du binôme de Newton

Si on peut écrire  $A$  sous la forme  $A = B + C$  où  $B$  et  $C$  sont deux matrices qui commutent ( $BC = CB$ ), alors on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \in \mathbb{N}, A^p = (B + C)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} B^k C^{p-k}.$$

*Attention.* Il faut bien vérifier que  $B$  et  $C$  commutent !!

*Conseil.* Cette méthode est utile si on sait déjà calculer les puissances successives de  $B$  et  $C$  qui apparaissent dans la formule du binôme de Newton. C'est par exemple le cas si on peut écrire  $A$  sous la forme  $A = M + \lambda I_n$  où  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $M$  est une matrice dont on peut facilement conjecturer l'expression de  $M^k$  en fonction de  $k \in \mathbb{N}$ .

#### Exemple 7

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

*Solution.* On a  $A = I_4 + U$  où  $U$  est la matrice de l'exemple 5. Les matrices  $I_4$  et  $U$  commutent car  $I_4 U = U I_4 = U$ . D'après la formule du binôme de Newton, on obtient donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} A^p &= (U + I_4)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} U^k I_4^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} U^k \\ &= \binom{p}{0} U^0 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} 4^{k-1} U \quad (\text{car } U^k = 4^{k-1} U \text{ pour tout } k \geq 1 \text{ d'après l'exemple 5}) \\ &= I_4 + \frac{1}{4} \left( \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 4^k \right) U - \frac{1}{4} \binom{p}{0} 4^0 U \\ &= I_4 + \frac{1}{4} (4+1)^p U - \frac{1}{4} U \quad (\text{d'après la formule du binôme de Newton}) \\ &= I_4 + \frac{1}{4} (5^p - 1) U. \end{aligned}$$

#### Exercice d'application 10

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

#### Exercice d'application 11

Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

#### 4.5 À l'aide d'une matrice semblable

Une matrice semblable à  $A$  est une matrice  $B = P^{-1}AP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  où  $P \in \mathcal{G}_n(\mathbb{K})$ . Dans ce cas, on peut montrer par récurrence que  $A^p = PB^pP^{-1}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Ainsi, pour calculer les puissances successives de  $A$ , il suffit de calculer les puissances successives de  $B$ .

*Conseil.* Pour certaines matrices  $A$ , on peut trouver  $P$  afin que la matrice  $B$  soit diagonale (on dit alors qu'on a «diagonalisé»  $A$ ). Le calcul des puissances successives de  $B$ , et donc ceux de  $A$ , sont alors très simples.

#### Exemple 8

Soient  $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible, calculer  $P^{-1}AP$ , puis en déduire  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

*Solution.* On a  $\det(P) = -2 \neq 0$  donc  $P$  est inversible avec  $P^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $P^{-1}AP = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . On pose  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Montrons par récurrence que  $A^p = PD^pP^{-1}$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Le résultat est vrai pour  $p = 0$  car  $A^0 = I_2 = PP^{-1} = PI_2P^{-1} = PD^0P^{-1}$ . Si on suppose le résultat vrai pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , alors :

$$A^{p+1} = A^p A = PD^p P^{-1} \times \underbrace{PDP^{-1}}_{\text{car } P^{-1}AP = D} = PD^p I_2 DP^{-1} = PD^p DP^{-1} = PD^{p+1} P^{-1}.$$

On conclut d'après le principe de récurrence. On en déduit que pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :

$$A^p = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 2^p + 3 \times 3^p & 2^p - 3^p \\ -6 \times 2^p + 6 \times 3^p & 3 \times 2^p - 2 \times 3^p \end{pmatrix}.$$

□

#### Exercice d'application 12

Soient  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $P$  est inversible, calculer  $P^{-1}AP$ , puis en déduire  $A^p$  en fonction de  $p \in \mathbb{N}$ .

□