Fiche méthodologique n° 13

Manipuler des équations de géométrie

Le plan affine et l'espace affine sont munis de repères orthonormés.

1 Reconnaître l'équation cartésienne d'un cercle

Le cercle du plan de centre $C(x_C, y_C)$ et de rayon $R > 0$ admet pour représentation cartésienne :

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 - 2x_C x - 2y_C y + (x_C^2 + y_C^2 - R^2) = 0.$$

Ainsi, pour étudier une équation cartésienne du plan de la forme :

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il suffit de l'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{C} : \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c.$$

On distingue alors trois cas selon le signe de $d = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$.
- si $d < 0$ alors $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide ;
- si $d = 0$ alors $\mathcal{C}$ est le singleton contenant le point $C(-a/2, -b/2)$;
- si $d > 0$ alors $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $C(-a/2, -b/2)$ et de rayon $\sqrt{d}$.

Exercice d'application 1
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Déterminer en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda$.

2 Passer d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique

Pour passer d'une représentation cartésienne d'une droite $\mathcal{D}$ ou d'un plan $\mathcal{P}$ à une représentation paramétrique, il suffit de déterminer un point de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{P}$ ainsi qu'un vecteur directeur non nul de $\mathcal{D}$ ou deux vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

2.1 Représentation paramétrique d'une droite du plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan de représentation cartésienne :

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0 \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer un point $A(x_A, y_A)$ de $\mathcal{D}$, il suffit de fixer arbitrairement une des deux coordonnées x_A ou y_A puis de calculer la deuxième coordonnée comme solution de l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Et pour déterminer un vecteur directeur non nul $\overrightarrow{AB}$ de $\mathcal{D}$, il suffit de déterminer un deuxième point $B(x_B, y_B)$ de $\mathcal{D}$ distinct de $A(x_A, y_A)$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : pour déterminer un vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$, on peut aussi choisir $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ qui est orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = ba - ab = 0$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + bt \\ y = y_A - at \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 2
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'équation $2x - 3y + 4 = 0$.

Une autre méthode consiste tout simplement à choisir comme paramètre une des deux coordonnées apparaissant avec un coefficient non nul dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ (ce qui est possible car $(a, b) \neq (0, 0)$) puis d'exprimer chaque coordonnée en fonction de ce paramètre. On obtient ainsi :

$$\mathcal{D} : \left(\begin{cases} x = -\frac{c}{a} - \frac{b}{a}t \\ y = t \end{cases} \text{si } a \neq 0 \right) \text{ou} \left(\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}t \end{cases} \text{si } b \neq 0 \right), \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 3
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'équation $-2x + 5y + 1 = 0$.

2.2 Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace de représentation cartésienne :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ et } (a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4 \\ \text{avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ non colinéaires.} \end{array}$$

Pour déterminer un point et un vecteur directeur non nul de $\mathcal{D}$, il suffit de déterminer deux points distincts $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ de $\mathcal{D}$ en fixant arbitrairement une des coordonnées puis de calculer les deux autres coordonnées comme solution du système d'équations cartésiennes de $\mathcal{D}$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Remarque : pour déterminer un vecteur directeur non nul $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$, on peut aussi choisir $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ orthogonal au vecteur normal $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire tel que car $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n} = \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. Une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + \alpha t \\ y = y_A + \beta t \\ z = z_A + \gamma t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application 4
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'équations :

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Ou tout simplement, il suffit de choisir comme paramètre une des trois coordonnées puis d'exprimer chaque coordonnée en fonction de ce paramètre à l'aide des équations cartésiennes de $\mathcal{D}$.

Exercice d'application 5
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'équations :

$$\begin{cases} 2x - 3z + 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

2.3 Représentation paramétrique d'un plan de l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de représentation cartésienne :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0 \quad \text{où } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ avec } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer un point et deux vecteurs vecteurs directeurs non colinéaires de $\mathcal{P}$, il suffit de déterminer trois points distincts $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ et $C(x_C, y_C, z_C)$ de $\mathcal{P}$ en fixant arbitrairement deux des coordonnées puis de calculer la troisième coordonnée comme solution de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$. On vérifie ensuite que les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Si ce n'est pas le cas, il suffit de déterminer un autre point $C(x_C, y_C, z_C)$ tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)s + (x_C - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)s + (y_C - y_A)t \\ z = z_A + (z_B - z_A)s + (z_C - z_A)t \end{cases}, \ (s, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice d'application 6
Déterminer une représentation paramétrique du plan d'équation $2x - 3y + 4z - 5 = 0$.

Ou tout simplement, il suffit de choisir comme paramètres deux des trois coordonnées puis d'exprimer chaque coordonnée en fonction de ces paramètres à l'aide de l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice d'application 7
Déterminer une représentation paramétrique du plan d'équation $z + 2 = 0$.

3 Passer d'une représentation paramétrique à des équations cartésiennes

Pour passer d'une représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ ou d'un plan $\mathcal{P}$ à une représentation cartésienne, il suffit de déterminer un point de $\mathcal{D}$ ou $\mathcal{P}$ ainsi qu'un vecteur normal non nul de $\mathcal{D}$ (dans le plan) ou $\mathcal{P}$ ou deux vecteurs normaux non colinéaires de $\mathcal{D}$ (dans l'espace).

3.1 Représentation cartésienne d'une droite du plan

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{où } (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer un vecteur normal non nul $\overrightarrow{n}$ de $\mathcal{D}$, il suffit de choisir $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$ qui est orthogonal au vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$ car $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = \beta\alpha - \alpha\beta = 0$. Une représentation cartésienne de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \beta x - \alpha y + c = 0$$

où la constante $c \in \mathbb{R}$ est calculée en reportant dans l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ les coordonnées d'un point arbitraire de $\mathcal{D}$, par exemple le point $M_0(x_0, y_0)$ obtenu en fixant le paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétriques de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire :

$$c = -(\beta x_0 - \alpha y_0).$$

Remarque : on retrouve facilement ce résultat à l'aide du déterminant, plus précisément tout point $M(x, y)$ du plan appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{pmatrix} = (x - x_0)\beta - (y - y_0)\alpha = \beta x - \alpha y - (\beta x_0 - \alpha y_0) = 0.$$

Exercice d'application 8

Déterminer une représentation cartésienne de la droite $\begin{cases} x = 1-2t \\ y = -1+3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Une autre méthode consiste tout simplement à exprimer le paramètre t en fonction d'une des deux coordonnées à l'aide d'une des deux équations paramétriques de $\mathcal{D}$ dans laquelle t apparaît avec un coefficient non nul (ce qui est possible car $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$) puis de reporter cette expression dans la deuxième équation paramétrique. On obtient ainsi :

$$\mathcal{D} : \left(y = y_0 + \beta \left(\frac{x-x_0}{\alpha} \right) \text{ si } \alpha \neq 0 \right) \text{ou} \left(x = x_0 + \alpha \left(\frac{y-y_0}{\beta} \right) \text{ si } \beta \neq 0 \right).$$

Exercice d'application 9

Déterminer une représentation cartésienne de la droite $\begin{cases} x = 3-2t \\ y = -2+5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.2 Représentation cartésienne d'une droite de l'espace

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace de représentation paramétrique :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{où } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer deux vecteurs normaux non colinéaires $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{D}$, il suffit de choisir arbitrairement deux solutions non colinéaires de l'équation $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ (par exemple les solutions $\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix}$). Une représentation cartésienne de $\mathcal{D}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où les constantes $(d, d') \in \mathbb{R}^2$ sont calculées en reportant dans les équations cartésiennes de $\mathcal{D}$ les coordonnées d'un point arbitraire de $\mathcal{D}$, par exemple le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ obtenu en fixant le paramètre $t = 0$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire :

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0) \quad \text{et} \quad d' = -(a'x_0 + b'y_0 + c'z_0).$$

Exercice d'application 10

Déterminer une représentation cartésienne de la droite $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 3+2t \\ z = -5t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Ou tout simplement, il suffit d'exprimer le paramètre t en fonction d'une des trois coordonnées à l'aide d'une des trois équations paramétriques de $\mathcal{D}$ puis de reporter cette expression dans les deux autres équations paramétriques.

Exercice d'application 11

Déterminer une représentation cartésienne de la droite $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1+2t \\ z = 5+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

3.3 Représentation cartésienne d'un plan de l'espace

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de représentation paramétrique :

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = x_0 + \alpha s + \alpha' t \\ y = y_0 + \beta s + \beta' t \\ z = z_0 + \gamma s + \gamma' t \end{cases}, (s,t) \in \mathbb{R}^2. \quad \begin{array}{l} \text{où } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, \\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \text{ et } (\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^3 \\ \text{avec } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} \text{ non colinéaires.} \end{array}$$

Pour déterminer un vecteur normal non nul $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de $\mathcal{P}$, il suffit de choisir arbitrairement une solution du système linéaire formé par les équations $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u} = a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{u}' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = 0$ où $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}' = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$. Une représentation cartésienne de $\mathcal{P}$ est alors donnée par :

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

où la constante $d \in \mathbb{R}$ est calculée en reportant dans l'équation cartésienne de $\mathcal{P}$ les coordonnées d'un point arbitraire de $\mathcal{P}$, par exemple le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ obtenu en fixant les paramètres $s = t = 0$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire :

$$d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Exercice d'application 12

Déterminer une représentation cartésienne du plan $\begin{cases} x = 1+s+t \\ y = 2-3s \\ z = 2s-t \end{cases}$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

Ou tout simplement, il suffit d'exprimer les paramètres s et t en fonction de deux des trois coordonnées à l'aide de deux des trois équations paramétriques de $\mathcal{P}$ (en résolvant un système linéaire) puis de reporter ces expressions dans la troisième équation paramétrique.

Exercice d'application 13

Déterminer une représentation cartésienne du plan $\begin{cases} x = s+5t \\ y = 2-s+t \\ z = 3-2s-2t \end{cases}$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.

4 Déterminer des intersections de droites et de plans

Pour déterminer une intersection de droites ou de plans, il suffit de résoudre le système linéaire formé par toutes les équations cartésiennes représentant ces droites ou ces plans. Dans le cas de représentations paramétriques, on commence par éliminer les paramètres en les exprimant en fonction des coordonnées.

4.1 Intersection de deux droites du plan

On obtient un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui admet :
— zéro solutions si les deux droites sont parallèles,
— une seule solution si les deux droites sont sécantes (dans ce cas les coordonnées du point d'intersection forment l'unique solution du système linéaire),
— ou bien une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.

Exercice d'application 14
Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : 2x - y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}' : -3x + 2y = 0$.

4.2 Intersection de deux droites de l'espace

On obtient un système linéaire de quatre équations à trois inconnues qui admet :
— zéro solutions si les deux droites sont parallèles ou non coplanaires,
— une seule solution si les deux droites sont sécantes (dans ce cas les coordonnées du point d'intersection forment l'unique solution du système linéaire),
— ou bien une infinité de solutions si les deux droites sont confondues.

Exercice d'application 15
Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : \begin{cases} 3x + y - z + 2 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' : \begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ x + 2y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$.

4.3 Intersection d'une droite et d'un plan de l'espace

On obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues qui admet :
— zéro solutions si la droite est parallèle au plan,
— une seule solution si la droite et le plan sont sécants (dans ce cas les coordonnées du point d'intersection forment l'unique solution du système linéaire),
— ou bien une infinité de solutions si la droite est contenue dans le plan.

Exercice d'application 16
Déterminer l'intersection de $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x + 3y - 5z + 2 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{P} : x - y + 4z - 8 = 0$.

4.4 Intersection de deux plans de l'espace

On obtient un système linéaire de deux équations à trois inconnues qui admet :
— zéro solutions si les deux plans sont parallèles,
— une infinité de solutions qui dépend d'un paramètre (l'inconnue auxiliaire) si les deux plans sont sécants (dans ce cas une représentation paramétrique de la droite d'intersection est donnée par l'ensemble des solutions du système),
— ou bien une infinité de solutions qui dépend de deux paramètres (deux inconnues auxiliaires) si les deux plans sont confondus.

Remarque : le cas d'une seule solution est impossible ici car il y a au moins une inconnue auxiliaire.

Exercice d'application 17
Déterminer l'intersection de $\mathcal{P} : x + y - z - 2 = 0$ et $\mathcal{P}' : 3x + 2y - 5z + 3 = 0$.