Fiche méthodologique n° 15

Manipuler des polynômes

1 Identifier les coefficients de deux polynômes

Deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux entre eux.

De plus, si une infinité d'éléments de $\mathbb{K}$ ont même image par deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors ces deux polynômes sont égaux.

Ainsi, il suffit que deux fonctions polynomiales soient égales sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{K}$ pour identifier leurs coefficients de même degré.

Exercice d'application 1
Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. En considérant le polynôme $(X+1)^{m+n}$, démontrer l'identité de Vandermonde :

$$\forall k \in [\![0, m+n]\!],\ \sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell} = \binom{m+n}{k}.$$

Exercice d'application 2
Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y''(t) + y'(t) - 2y(t) = t^5 e^t.$$

2 Montrer qu'un polynôme est nul

Pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$) est nul, il suffit de prouver qu'il a au moins $n+1$ racines distinctes. Plus généralement, pour montrer qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est nul, il suffit de prouver qu'il a une infinité de racines distinctes.

Exercice d'application 3
Montrer que $x \mapsto \cos(x)$ n'est pas une application polynomiale.

Exercice d'application 4
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe au plus un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(k) = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

3 Calculer l'ordre de multiplicité d'une racine

L'élément $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre $m \geqslant 1$ d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ si et seulement si $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$. Pour déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine α de P, il suffit donc de calculer les dérivées successives $P^{(k)}$ de P jusqu'à ce que $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

Exercice d'application 5
Soit $n \geqslant 1$. Montrer que 1 est une racine de $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ et calculer son ordre de multiplicité.

4 Factoriser un polynôme

4.1 Factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Pour factoriser un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on commence par déterminer ses racines distinctes α_1, α_2, …, α_ℓ en résolvant l'équation $P(\alpha) = 0$ d'inconnue $\alpha \in \mathbb{C}$, puis on calcule l'ordre de multiplicité m_k de chaque racine α_k où $k \in [\![1, \ell]\!]$. On a alors $P = a\prod_{k=1}^{\ell}(X - \alpha_k)^{m_k}$ où a est le coefficient dominant de P.

Exercice d'application 6
Factoriser le polynôme $P = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 5X + 6$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice d'application 7
Factoriser le polynôme $P = X^5 + 6X^4 + 10X^3 - 20X^2 - 51X - 26$ dans $\mathbb{C}[X]$.

4.2 Factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$

Pour factoriser un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on commence par le factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis on remarque que si $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine d'ordre $m \geqslant 1$ de P alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine d'ordre m de P (puisque $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = 0$ car $P \in \mathbb{R}[X]$). En particulier, P est factorisable par $(X-\alpha)^m(X-\overline{\alpha})^m = (X^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)X + |\alpha|^2)^m \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice d'application 8
Factoriser le polynôme $P = X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice d'application 9
Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que $P = X^{3n+2} + X^{3p+1} + X^{3q}$ est factorisable par $X^2 + X + 1$.

5 Utiliser les relations entre coefficients et racines

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$ dont la liste des n racines (non nécessairement distinctes) est α_1, α_2, …, α_n. Alors la somme et le produit des racines sont donnés par :

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Exercice d'application 10
Soit $n \geqslant 2$. Calculer la somme et le produit des racines n-ièmes de l'unité.