

# Étudier des limites de fonctions réelles

Soit  $f$  une fonction réelle définie au voisinage de  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

## 1 Montrer que $f$ n'a pas de limite en $a$

### 1.1 A l'aide des limites à gauche et à droite si $a \in \mathbb{R}$

Dans le cas où  $a \in \mathbb{R}$ , si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe alors  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existent et sont égales (à  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ). En particulier, il suffit de montrer que la limite à droite ou la limite à gauche n'existe pas ou bien que ces deux limites sont différentes pour prouver que  $f$  n'a pas de limite en  $a$ .

#### Exercice d'application 1

Montrer que  $x \mapsto \frac{1}{1 + e^{1/x}}$  n'a pas de limite en 0.

### 1.2 En utilisant des suites

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe alors pour toute suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $a$ , la suite  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  converge vers  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Par contraposée, il suffit donc de trouver une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  qui converge vers  $a$  telle que la suite  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  diverge ou bien de trouver deux suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  qui convergent vers  $a$  telles que les suites  $(f(u_n))_{n \geq 0}$  et  $(f(v_n))_{n \geq 0}$  n'ont pas la même limite pour prouver que  $f$  n'a pas de limite en  $a$ .

#### Exercice d'application 2

Montrer que  $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  n'a pas de limite en 0.

## 2 Montrer que $f$ a une limite en $a$

### 2.1 A l'aide des limites à gauche et à droite si $a \in \mathbb{R}$

Dans le cas où  $f$  n'est pas définie en  $a$ , il suffit de montrer que les limites à gauche et à droite existent et sont égales pour prouver que  $f$  a une limite en  $a$ , et dans ce cas  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

*Attention* : dans le cas où  $f$  est définie en  $a$ , il est nécessaire de vérifier de plus que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  pour pouvoir conclure.

#### Exercice d'application 3

Montrer que  $x \mapsto \cos\left(x \left| 1 + \frac{1}{x} \right| \right)$  a une limite en 0.

### Exercice d'application 4

Étudier la limite en 0 de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(0) = 0$  et  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

## 2.2 A l'aide des théorèmes généraux

Les théorèmes suivants permettent de justifier l'existence de la limite de  $f$  en  $a$ .

**Théorème de la limite par encadrement.** Si  $g \leq f \leq h$  au voisinage de  $a$  où  $g$  et  $h$  sont deux fonctions réelles qui admettent des limites égales en  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x)$ .

**Théorème de la limite par comparaison.** Si  $g \leq f$  (respectivement  $f \leq h$ ) au voisinage de  $a$  où  $g$  (respectivement  $h$ ) est une fonction réelle définie au voisinage de  $a$  telle que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = -\infty$ ), alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ).

**Théorème de la limite monotone.** Si  $f$  est croissante (respectivement décroissante) sur son domaine de définition de la forme  $]a, b[$  où  $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  existent. De plus :

- si  $f$  est minorée (respectivement majorée) alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \mathbb{R}$ , sinon  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ );
- si  $f$  est majorée (respectivement minorée) alors  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) \in \mathbb{R}$ , sinon  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = +\infty$  (respectivement  $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = -\infty$ ).

*Remarque* : le théorème de la limite monotone ne permet pas de déterminer la valeur de la limite dans le cas où elle est réelle, il justifie seulement son existence.

#### Exercice d'application 5

Montrer que  $x \mapsto x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$  admet une limite en 0.

#### Exercice d'application 6

Montrer que  $x \mapsto x + \cos(x)$  admet une limite en  $+\infty$ .

## 3 Étudier les limites d'une fonction implicite

Une fonction implicite est une fonction  $f$  dont l'image  $y = f(x)$  de chaque élément  $x$  de son ensemble de définition est définie comme l'unique solution d'une équation du type  $g_x(y) = 0$  où  $F$  est une fonction réelle de deux variables.

Le schéma classique d'étude d'une fonction implicite est le suivant :

1. Montrer que la fonction  $f$  est bien définie. Il s'agit de montrer que pour chaque élément  $x$  fixé, l'équation  $g_x(y) = 0$  d'inconnue  $y \in \mathbb{R}$  admet une unique solution.
2. Montrer que la fonction  $f$  est monotone. Il suffit de poser  $x_1 < x_2$  et de déterminer le signe de  $g_{x_1}(f(x_2))$  en utilisant que  $g_{x_2}(f(x_2)) = 0$ . En effet, en comparant  $g_{x_1}(f(x_2))$  et  $0 = g_{x_1}(f(x_1))$  on pourra en déduire une comparaison de  $f(x_1)$  et  $f(x_2)$  en utilisant les variations de la fonction  $g_{x_1}$ .

3. Montrer que la fonction  $f$  admet des limites aux bornes de son ensemble de définition. Il suffit de minorer ou majorer l'unique solution  $y = f(x)$  de chaque équation  $g_x(y) = 0$  puis d'utiliser le théorème de la limite monotone. *Attention* : le minorant ou le majorant obtenu ne doit pas dépendre de  $x$ .
4. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $a$ . Il suffit de poser  $\ell = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  puis de passer à la limite quand  $x \rightarrow a$  dans la relation  $g_x(f(x)) = 0$ . *Attention* : il y a souvent plusieurs cas possibles à étudier pour le calcul de  $\lim_{x \rightarrow a} g_x(f(x))$  en fonction des différentes valeurs de  $\ell$ .

### Exercice d'application 7

Pour tout  $x > 0$ , justifier que l'équation  $y = e^{-xy}$  d'inconnue  $y \in \mathbb{R}$  admet une unique solution qu'on notera  $f(x)$ . Déterminer les limites de  $f$  en 0 et  $+\infty$ .

## 4 Calculer la limite de $f$ en $a$

Le plus souvent, pour justifier l'existence de la limite de  $f$  en  $a$ , il suffit de la calculer.

### Exercice d'application 8

Montrer que  $x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x}$  admet une limite en 0.

### Exercice d'application 9

Montrer que  $x \mapsto \arctan(\sqrt{1 + \ln(x)})$  admet une limite en  $+\infty$ .

### 4.1 À l'aide du théorème des croissances comparées

On a pour tous réels  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $0 < \alpha < \beta$  :

$$\ln(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\alpha), \quad x^\alpha = o_{x \rightarrow +\infty}(x^\beta), \quad x^\beta = o_{x \rightarrow +\infty}(\exp(x)).$$

### Exercice d'application 10

Calculer la limite de  $x \mapsto \frac{x^{42}}{2^x}$  en  $+\infty$ .

### Exercice d'application 11

Calculer la limite de  $x \mapsto x(\ln(x))^{42}$  en 0.

### 4.2 En utilisant des équivalents usuels

— On a quand  $x \rightarrow +\infty$  :

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} a_px^p$$

$$\text{et } \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_qx^q} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_px^{p-q}}{b_q}$$

où  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ ,  $(a_0, a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ ,  $(b_0, b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}^{q+1}$  avec  $a_p \neq 0$ ,  $b_q \neq 0$ .  
— On a quand  $x \rightarrow 0$  :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad ((1+x)^\alpha - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad (\exp(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$$

$$\text{et } (\cos(x) - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \quad \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x, \quad \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x.$$

*Remarque* : on obtient en particulier que  $(\sqrt{1+x} - 1) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$  et on retrouve que  $(1+x)^{-1} - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-1}{\frac{1}{x}+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = -x$ .

*Conseil* : dans le cas où  $a \neq 0$  et  $a \neq +\infty$ , on se ramène aux équivalents usuels ou au théorème des croissances comparées à l'aide de changements de variable.

### Exercice d'application 12

Calculer la limite de  $x \mapsto \frac{e^x - 1}{\sin^3(x)} (\sqrt{\cos(x)} - 1)$  en 0.

### Exercice d'application 13

Calculer la limite de  $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1 - \sqrt{x}}$  en 1.

### Exercice d'application 14

Calculer la limite de  $x \mapsto (\sin(x))^{\tan(x)}$  en  $\frac{\pi}{2}$ .

### Exercice d'application 15

Calculer la limite de  $x \mapsto \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$  en  $+\infty$ .